CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2014-2015 - Appello del 15 gennaio 2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e il vettore $\boldsymbol{b} = [\,2,\ -2,\ 2,\ -2\,]^T$.

(a) Si determinino l'insieme V delle soluzioni del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e il nucleo di B, $N(B)$.

(b) Si consideri poi l'intersezione $W = V \cap N(B)$, e si verifichi che ogni vettore $\boldsymbol{x} \in W$ è esprimibile nella forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{z}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, per due opportuni vettori $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ ortogonali.

(c) Qual è il vettore di W di lunghezza minima?

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori $\boldsymbol{v}_1 = [\,1,\ 1,\ 0\,]^T$ e $\boldsymbol{v}_2 = [\,1,\ -1,\ 1\,]^T$, e la proiezione ortogonale p su V come applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determini la matrice P che rappresenta p, se si considera la base canonica su entrambe le copie di $\mathbb{R}^3$. Per quale motivo P non è invertibile?

(b) (*facoltativo*) Si dimostri che, per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, vale la relazione

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{||\boldsymbol{v}_1||^2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{||\boldsymbol{v}_2||^2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2.$$

Esercizio 3. Si diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ovvero si trovino S invertibile e D diagonale, tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. Sia $p(x)$ il polinomio di grado massimo uno che approssima ai minimi quadrati una funzione $f(x)$, di cui sono dati i valori nei nodi $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$:

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 2.$$

(a) Si calcoli $p(x)$.

(b) Si consideri il polinomio ai minimi quadrati $q(x)$, di grado massimo uno, che approssima sugli stessi nodi del punto precedente un'altra funzione $g(x)$. Che relazione deve esserci tra i valori $f(x_i)$ e $g(x_i)$ affinché $p(x) \equiv q(x)$?.