CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2015-2016 - Appello del 19 gennaio 2016

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)/2 \\ (x_2 + x_3)/2 \\ (x_3 + x_1)/2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si indichi la matrice A che rappresenta l'applicazione assegnata se si considera la base canonica su entrambe le copie di $\mathbb{R}^3$. Si verifichi che A è invertibile.

(b) Si verifichi che la matrice $(1/2\, I - A)^3$ è diagonale.

(c) Si ricavi dal risultato precedente una formula esplicita per A^{-1}.

Esercizio 2. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcoli l'inversa di A.

(b) Si considerino i tre vettori di $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{y}_1 = A^{-1}\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{y}_3 = A\boldsymbol{e}$, dove $\boldsymbol{e} = [1,\ 1,\ 1]^T$, si verifichi che sono linearmente dipendenti e si determinino i coefficienti α_i, non tutti nulli, di una combinazione lineare nulla $\alpha_1\boldsymbol{y}_1 + \alpha_2\boldsymbol{y}_2 + \alpha_3\boldsymbol{y}_3$.

(c) (*facoltativo*) Che relazione deve esserci tra il polinomio $\alpha_3\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_1$ e gli autovalori di A?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Si localizzino gli autovalori di A con il teorema di Gerschgorin.

(b) Si consideri la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{R},$$

e la trasformata per similitudine di A: $B = S^{-1}AS$. Esistono valori di k tali che, applicando il teorema di Gerschgorin a B, sia possibile determinare un intervallo contenente un solo autovalore reale di A?

Esercizio 4. Sia $f(x) = x^4$.

(a) Si calcoli il polinomio $p(x)$ di grado massimo due che approssima ai minimi quadrati $f(x)$ nei nodi $x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1, x_3 = 2$.

(b) Si individuino tre nodi z_i, $i = 0, 1, 2$, rispetto ai quali $p(x)$ sia anche il polinomio di interpolazione per $f(x)$.

A