CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2009/2010 - Appello del 13 luglio 2010

Esercizio 1 È data la matrice

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

con α numero reale.
(a) Si calcoli il valore $\bar{\alpha}$ per cui $\operatorname{rk}(A(\bar{\alpha})) < 4$.
(b) Si determini una base dell'immagine $S(A(\bar{\alpha}))$.
(c) Usando la base ottenuta in (b) si indichino due matrici B, 4×3 e C, 3×4, tali che valga $A(\bar{\alpha}) = BC$.

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & -a & -a \end{bmatrix},$$

con a numero reale.
(a) Si verifichi che A è singolare per ogni a.
(b) Si verifichi che A è diagonalizzabile per ogni a.
(c) (*facoltativo*) Si consideri A_n definita analogamente ad A, ma avente ordine n. Si verifichi che, se n è dispari, A_n è singolare per ogni a.

Esercizio 3 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Applicando il teorema di Gerschgorin, si dia una limitazione superiore per $\max |\lambda_i|$, dove con λ_i si indicano gli autovalori di A.
(b) Applicando il teorema di Gerschgorin ad A^2, si verifichi che è possibile trovare una limitazione superiore per $\max |\lambda_i|$, migliore di quella trovata in (a).
(c) Si calcolino gli autovalori di A, sapendo che uno di loro è intero. Si verichi la correttezza della limitazione trovata in (b).

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, e i punti $x_0 = 0$, $x_1 = k^2$, $x_2 = 1$, con $0 < k < 1$.
(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado massimo 2 che interpola $f(x)$ in x_0, x_1 e x_2;
(b) si calcolino i coefficienti del polinomio $q(x)$ di grado massimo 2 che soddisfa le condizioni $q(x_0) = f(x_0)$, $q'(x_1) = f'(x_1)$, $q(x_2) = f(x_2)$, indicando per quali valori di k questo polinomio esiste;
(c) si calcolino i limiti $\lim_{k\to 1} p(x)$ e $\lim_{k\to 1} q(x)$ (cioè i limiti dei rispettivi coefficienti).