CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2013/2014 - Appello del 3 febbraio 2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si esprimano le soluzioni nella forma $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} \in N(A)^{\perp}$, e $\mathbf{v} \in N(A)$.
(b) (*facoltativo*) $\mathbf{u}$ è univocamente determinato? Se lo è si spieghi perché.

Esercizio 2 Si consideri l'insieme V delle matrici S simmetriche a elementi reali, 2×2.
(a) Si verifichi che è uno spazio vettoriale, se ne indichi la dimensione e una base.
(b) Si consideri l'applicazione $f : V \to V$ così definita:

$$f(S) = \begin{bmatrix} s_{11} + s_{22} & s_{12} + s_{21} \\ s_{12} + s_{21} & s_{11} - s_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{con } S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che f è lineare e si determini la matrice A che la rappresenta rispetto alla base scelta al punto (a).
(c) Si indichi con λ l'autovalore di A massimo in modulo, si determinino i corrispondenti autovettori e quindi le matrici S tali che $f(S) = \lambda S$. A è diagonalizzabile?

Esercizio 3 Si applichi il teorema di Gerschgorin, per righe e per colonne, alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) È possibile stabilire se gli autovalori di A sono tutti reali? In tal caso, quali sono le migliori limitazioni che si possono ottenere, per ogni autovalore?
(b) Si consideri una matrice diagonale D della forma

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

con α reale non nullo, e la matrice $B = D^{-1}AD$. Che relazione c'è tra gli autovalori di A e quelli di B? Si indichi, se esiste, un valore di α per cui i cerchi di Gerschgorin per colonna di B sono a due a due disgiunti.

Esercizio 4 Sono dati la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|}}$, e i nodi $x_0 = -3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.
(a) Si calcolino, risolvendo con il metodo di Gauss un opportuno sistema lineare, i coefficienti del polinomio $p(x)$ di interpolazione di grado massimo due, che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati.
(b) Si calcoli l'inversa della matrice dei coefficienti del sistema risolto al punto (a), ricavandola dalla sua matrice aggiunta. Si riottenga poi la soluzione già ottenuta al punto (a), moltiplicando l'inversa per il vettore dei termini noti.