

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2014-2015 - Appello del 4 febbraio 2015

NOME

COGNOME

Esercizio 1. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determinino i sottospazi immagine $S(A)$, $S(B)$, $S(A+B)$, e il sottospazio somma $S(A) + S(B)$, indicandone dimensioni e basi.
- (b) Si verifichi che $S(A+B)$ è un sottospazio proprio di $S(A) + S(B)$.
- (c) Si dimostri che, date due matrici A e B entrambe $m \times n$, $S(A+B)$ è un sottospazio di $S(A) + S(B)$.

Esercizio 2. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si verifichi la relazione $(A - I)^2 = O$.
- (b) Si ottenga dalla relazione precedente una formula per l'inversa di A (suggerimento: si espanda il quadrato nella relazione al punto (a) e si individui una matrice che, moltiplicata per A , dà la matrice inversa).
- (c) Si calcoli A^{-1} con il metodo di Gauss o di Gauss-Jordan e si confronti il risultato con quanto ottenuto al punto (b).

Esercizio 3. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si calcolino polinomio caratteristico e autovalori di A . A è diagonalizzabile?
- (b) $A + I$ è diagonalizzabile? (si risponda senza effettuare altri calcoli)
- (c) A^2 è diagonalizzabile? (si risponda senza effettuare altri calcoli)
- (d) (*facoltativo*) Si calcoli A^2 . È possibile, dal risultato ottenuto, dedurre che A è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia $p(x)$ il polinomio che interpola una funzione $f(x)$, di cui sono dati i valori nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$:

$$f(x_0) = -1, \quad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = k,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Si calcolino i coefficienti di $p(x)$, risolvendo un opportuno sistema lineare.
- (b) Si calcoli direttamente $p(0)$ usando la formula di Lagrange.
- (c) Si usino i risultati ottenuti nel caso che si voglia interpolare, negli stessi nodi, la funzione $f(x) = x + \log(1 + x^2) - \log 2$. In questo caso quanto vale $p(0)$?