CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2015-2016 - Appello del 10 febbraio 2016

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si considerino U e V, sottospazi di $\mathbb{R}^4$, generati rispettivamente dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ cosí definiti:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determinino $\dim U$, $\dim V$ e $\dim(U + V)$.

(b) Si verifichi che il vettore $\boldsymbol{z} = [-5,\ -3,\ 2,\ -1]^T$ appartiene al sottospazio $U + V$.

(c) Si indichino tutti i vettori $\boldsymbol{z}_1 \in U, \boldsymbol{z}_2 \in V$ tali che sia $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$.

(d) L'insieme formato dai vettori $\boldsymbol{z}_1$ di cui al punto precedente è un sottospazio di U?

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme V di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ che soddisfano la relazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si verifichi che V è un sottospazio, se ne calcoli la dimensione e se ne indichi una base.

(b) Si derivi dalla base trovata al punto precedente una base ortonormale.

(c) (*facoltativo*) Si determini la matrice che rappresenta la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su V, rispetto alla base canonica su $\mathbb{R}^3$ e alla base di V trovata al punto (b).

Esercizio 3. Si consideri la matrice quadrata di ordine 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

(a) Si verifichi che A è diagonalizzabile per ogni valore di k, esaminando le proprietà dei suoi autovalori e autovettori.

(b) Si indichi una trasformata per similitudine $B = S^{-1}AS$, con S diagonale e B simmetrica. Per quale ragione questo implica la diagonalizzabilità di A per ogni valore di k?

Esercizio 4. Sia $p(x)$ il polinomio che interpola una funzione $f(x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \alpha$, dove i corrispondenti valori di $f(x)$ sono $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = 1$, $f(x_3) = \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq x_i$, $i = 1, 2, 3$.

(a) Si calcolino i coefficienti di $p(x)$ come funzione di α e β.

(b) Si indichino tutti i valori di α e β per i quali $p(x)$ ha grado minore di tre.

B