CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2012/2013 - Appello dell'11 giugno 2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Dato k reale, si consideri la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2k-3 & -3 & 2 \\ -1 & 2k-1 & -2 \\ -1 & 3 & 2(k-3) \end{bmatrix}.$$

(a) Si studi il rango di A al variare di k.
(b) Scelto k in modo che sia rank $A = 1$, si costruisca una matrice B 3×3 tale che sia $BA = O$.
(c) Si dimostri che, comunque si scelga, B non può essere invertibile.

Esercizio 2 Si considerino la matrice 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

e il vettore di $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Senza calcolare le potenze di A, si costruisca la matrice 4×4

$$B = [\,\mathbf{z} \quad A\mathbf{z} \quad A^2\mathbf{z} \quad A^3\mathbf{z}\,].$$

(b) Si osservi che l'ultima colonna di B è nulla e si verifichi che il rango di B è tre.
(c) *(facoltativo)* Si dimostri che se $A^3\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e $A^2\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, allora i vettori $\mathbf{z}, A\mathbf{z}, A^2\mathbf{z}$ (le prime tre colonne di B) sono necessariamente linearmente indipendenti.

Esercizio 3 Si consideri la matrice seguente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si verifichi che A è diagonalizzabile.
(b) Esistono vettori $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, non nulli, tali che $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Esercizio 4 È data la funzione $f(x) = 1 - |x|$. Si vuole approssimare $f(x)$ con il polinomio ai minimi quadrati $p(x)$ di grado massimo due, rispetto ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = -a$, $x_2 = 0$, $x_3 = a$, $x_4 = 1$, dove $a \in [0, 1]$.
(a) Si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ in funzione di a.
(b) Che cosa accade per $a = 0$ e per $a = 1$?