**CORSO DI LAUREA IN CHIMICA**

Corso di Algebra lineare

A.A. 2013/2014 - Appello del 10 giugno 2014

**NOME** **COGNOME**

---

**Esercizio 1** Si considerino $U$ e $V$, sottospazi di $\mathbf{R}^4$, generati rispettivamente dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determinino $\dim U$ e $\dim V$.
(b) Si determini una base di $U + V$.
(c) Si indichi, se esiste, un vettore di $\mathbf{R}^4$ che non appartiene a $U + V$.

**Esercizio 2** Si consideri l'applicazione lineare $f$ da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

per ogni vettore $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ di $\mathbf{R}^n$.
(a) Si determini la matrice $A$ che rappresenta $f$, se si sceglie come base di $\mathbf{R}^n$ la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. $f$ è invertibile?
(b) Si Si determini la matrice $B$ che rappresenta $f$, se si sceglie come base di $\mathbf{R}^n$ la base $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n\}$ così definita: $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_n, \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_{i-1}, i = 2, \ldots, n$.

**Esercizio 3** Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si verifichi che $A$ è diagonalizzabile.
(b) Si verifichi che per $A$ vale la relazione $JA = -AJ$. Si dimostri poi che se una matrice $A$ soddisfa tale relazione, se ha autovalore $\lambda$ ha anche autovalore $-\lambda$.
(c) (*facoltativo*) Si dimostri che se una matrice $A$, quadrata di ordine 3, soddisfa la relazione di cui al punto precedente, allora è singolare.

**Esercizio 4** Sono dati i valori di una funzione $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = -2$.
(a) si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di approssimazione ai minimi quadrati, di grado massimo 1, che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati;
(b) si supponga di aggiungere un altro nodo $x_3 = 4$; che condizione deve doddisfare $f(4)$ perché approssimando ai minimi quadrati la funzione, sui quattro nodi, con un polinomio di grado massimo 1 si ottenga un polinomio nullo?