CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2015-2016 - Appello del 31 maggio 2016

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri l'insieme V dei vettori $\boldsymbol{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che risolvono il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con A e $\boldsymbol{b}$ così definiti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Si determinino tutti i vettori di V.

(b) Si determini un vettore di V ortogonale al nucleo di A, e si dimostri che è unico.

(c) (*facoltativo*) Si consideri l'insieme W dei vettori $\boldsymbol{y}$ di $\mathbb{R}^3$ che risolvono il sistema lineare $A^T A\boldsymbol{y} = A^T\boldsymbol{b}$. Si dimostri che $W = V$.

Esercizio 2. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Per i valori di k per cui esiste, si calcoli l'inversa di A in funzione di k.

(b) Esistono valori di k per cui A^{-1} è simmetrica?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 13 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Si localizzino gli autovalori λ_i di A con il teorema di Gerschgorin.

(b) Si dica quanti sono al più gli autovalori non reali, e per gli eventuali autovalori reali si indichino degli intervalli di appartenenza.

(c) Tenendo conto della localizzazione, si indichi la migliore scelta di due costanti reali positive, α e β, tali che $\alpha \leq \max_i |\lambda_i| \leq \beta$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \sin(\frac{\pi}{6}x) + \frac{1}{2}$.

(a) Si calcoli il polinomio $p(x)$ di grado massimo uno che approssima ai minimi quadrati $f(x)$ nei nodi $x_0 = -5,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1, x_3 = 5$.

(b) Si verifichi che se si aggiunge il nodo $x_4 = 0$ il polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno è ancora $p(x)$. Qual è il motivo?