CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2012/2013 - Appello del 10 settembre 2013

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ cosí definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{bmatrix},$$

per ogni vettore $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ di $\mathbf{R}^3$.

(a) Si determini la matrice A che rappresenta f, se si sceglie come base di $\mathbf{R}^3$ la base canonica. f è invertibile?

(b) Si trovino dimensioni e basi del nucleo $N(A)$, dell'immagine $S(A)$ e del sottospazio $N(A)^\perp$.

(c) Sapendo che $\mathbf{R}^3 = N(A) \oplus N(A)^\perp$, sia $p(\mathbf{x})$ l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ che manda $\mathbf{x}$ nell'unico vettore $\mathbf{z}$ di $N(A)^\perp$ tale che sia $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, dove $\mathbf{y} \in N(A)$. Si determini la matrice B che rappresenta p rispetto alla base canonica.

(d) (*facoltativo*) Si verichi che $AB = A$. Per quale ragione deve necessariamente valere tale relazione?

Esercizio 2 È data la matrice quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si verifichi che A è invertibile, e si calcoli l'inversa.

(b) Si verifichi che $(A - I)^3 = O$. Che cosa se ne può dedurre riguardo agli autovalori di A?

Esercizio 3 Si dica per quali valori del parametro k le matrici 2×2

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -k & 1-k \end{bmatrix}$$

sono diagonalizzabili, e per i valori di k per cui lo sono, si trovi la matrice di una trasformazione per similitudine che le diagonalizza.

Esercizio 4 Si vuole approssimare la funzione $f(x) = \sin^2(\pi x/2)$ con il polinomio ai minimi quadrati $p(x)$ di grado massimo 2, sui 4 nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Si calcoli $p(x)$.