CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2013/2014 - Appello del 9 settembre 2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \quad y_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} x_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

ovvero l'elemento i-esimo del vettore immagine è la media aritmetica calcolata sui primi i elementi del vettore argomento di f.

(a) Si determini la matrice che rappresenta f se si sceglie la base canonica su entrambe la copie di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$, $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, se ne scelga una base, e si determini la matrice che rappresenta, rispetto a questa base, la restrizione di f sul sottospazio V.

(c) Esistono vettori $\boldsymbol{x} \in V$ tali che $f(\boldsymbol{x}) = [\,1 \ \ -1 \ \ 0\,]^T$?

Esercizio 2

(a) Per quali valori reali del parametro k la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile?

(b) (*facoltativo*) Si dimostri che se una matrice quadrata di ordine n, non diagonale, ha n autovalori coincidenti, allora non è diagonalizzabile.

Esercizio 3 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si descriva l'insieme V formato dalle matrici B 3×3 tali che $AB = O$.

(b) Esistono in V matrici non singolari?

(c) Si verifichi che V è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici 3×3, e che ha dimensione 3.

Esercizio 4 Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)^3$, e i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$.

(a) si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di interpolazione, di grado massimo 2, che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati;

(b) quale polinomio di interpolazione si ottiene se si aggiunge un ulteriore nodo $x_3 = 2$?