CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2014-2015 - Appello del 16 aprile 2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Si determini un valore di α per cui $\operatorname{rank}(A) < 4$.

(b) Per tale valore di α si indichino una base dell'immagine $S(A)$ e una base del sottospazio ortogonale $S(A)^\perp$.

(c) Dato il vettore $\boldsymbol{z} = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, lo si esprima nella forma $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, con $\boldsymbol{u} \in S(A)$ e $\boldsymbol{v} \in S(A)^\perp$.

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme V di $\mathbb{R}^3$, formato dai vettori $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ che soddisfano la relazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

(a) Si verifichi che V è un sottospazio vettoriale e se ne indichi una base ortonormale.

(b) Si costruisca una matrice A, quadrata di dimensione 3, tale che V sia il nucleo di A.

Esercizio 3. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) A è diagonalizzabile?

(b) Si verifichi che $(A - I)^3 = O$.

(c) (*facoltativo*) Dalla relazione proposta al punto precedente si ricavi una formula esplicita per A^{-1}.

Esercizio 4. Si consideri, per n dispari, un insieme di $n+1$ nodi distinti, simmetrici rispetto a 0, tali cioè che $x_i = -x_{n-i}$, $\quad i = 0, 1, \ldots, n$, e una funzione $f(x)$ dispari, tale cioè che $f(-x) = -f(x)$. Sia $p(x)$ il polinomio di grado massimo uno che approssima ai minimi quadrati $f(x)$ nei nodi x_i.

(a) Che cosa si puo' dire riguardo ai coefficienti di $p(x)$?

(b) Si calcolino i coefficienti di $p(x)$ nel seguente caso particolare:

$$x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2, \quad f(x) = \sin(x\frac{\pi}{3}).$$