CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2014-2015 - Appello del 16 dicembre 2015

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. Si consideri il sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

(a) Si determinino la dimensione e una base di V.

(b) Si indichino tutte le possibili combinazioni lineari di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ con le quali si può esprimere $\boldsymbol{v}_4$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix},$$

con k reale.

(a) Per quali valori di k A è invertibile?

(b) Scelto un valore di k per cui A è invertibile, si calcoli A^{-1}.

(c) Per lo stesso valore di k, si usi l'inversa calcolata al punto (b) per determinare la matrice B tale che

$$A^2B = J, \quad \text{dove } J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. È data la matrice A quadrata di ordine 4, i cui elementi a_{ij} sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i+j \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } i+j \text{ è dispari} \end{cases}$$

.

(a) Si riduca a forma triangolare inferiore la matrice $A - \lambda I$, applicando, nell'ordine, alle sue righe e alle sue colonne le seguenti combinazioni lineari

- si aggiunga alla riga i-esima la riga $(i+1)$-esima, per $i = 1, 2, 3$;
- si sottragga dalla colonna j-esima la colonna $(j-1)$-esima, per $j = 2, 3, 4$.

(b) Tenendo conto della forma ridotta ottenuta al punto (a), si calcolino gli autovalori di A e, per ogni autovalore, un autovettore di lunghezza 1.

(c) A è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sono dati la funzione $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$, e i nodi $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 4$.

(a) Si calcolino il polinomio di interpolazione $p(x)$ di grado massimo 2 e il polinomio ai minimi quadrati di grado massimo 1 che approssimano la funzione $f(x)$ nei nodi assegnati.

(b) *(facoltativo)* Si determini il polinomio di interpolazione $s(x)$ di grado massimo 2 che approssima la funzione $g(x) = \sqrt{x}$ negli stessi nodi, sfruttando opportunamente il polinomio $p(x)$ calcolato al punto precedente.