CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2013/2014 - Appello del 17 aprile 2014

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

e k è un parametro reale.
(a) Si calcoli il valore di k per cui il sistema ha infinite soluzioni, e, per tale valore di k, si determini l'insieme S delle soluzioni.
(b) Si determini l'insieme V formato dai vettori ortogonali a tutti i vettori di S. V è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$?

Esercizio 2 Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sui vettori $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2]^T$ di $\mathbf{R}^2$.
(a) Si determini la matrice A che rappresenta f quando per entrambe le copie di $\mathbf{R}^2$ si sceglie la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
(b) Si consideri, per entrambe le copie di $\mathbf{R}^2$, la base $\{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$, e si trovi la matrice B che rappresenta f rispetto alla nuova base.
(c) (*facoltativo*) Si osservi che A e B sono simmetriche. Si dimostri allora che, data una matrice A quadrata e simmetrica e un cambiamento di base con matrice P tale che $PP^T = \alpha I$ per un opportuno numero α, allora anche la matrice B risultante dal cambiamento di base è simmetrica.

Esercizio 3 Sono dati i due vettori di $\mathbf{R}^3$ $\mathbf{u} = [-1 \; 1 \; 1]^T$ e $\mathbf{v} = [1 \; -2 \; 1]^T$. Si calcoli la matrice $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{v}\mathbf{u}^T$ e si stabilisca se è diagonalizzabile.

Esercizio 4 Sono dati la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, definita per $|x| \leq 1$, e i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = k$, $x_2 = 1$, con $0 \leq k < 1$.
(a) Si calcolino, risolvendo con il metodo di Gauss un opportuno sistema lineare, i coefficienti del polinomio $p(x)$ di interpolazione di grado massimo due, che approssima $f(x)$ nei nodi assegnati.
(b) Si verifichi che, per $k = 1$, il sistema di cui al punto (a) ha infinite soluzioni, e si indichino tutte quelle per cui $p(x) \leq f(x)$, per $|x| \leq 1$.