Esercizi proposti (maggio 2009)

Esercizio 21 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino gli autovalori di A.
(b) Si verifichi che la somma degli autovalori è uguale alla traccia di A e che il prodotto è uguale al determinante di A.
(c) Si dica se A è diagonalizzabile.
(d) Si disegnino sul piano complesso gli autovalori di A e l'insieme a cui devono appartenere secondo il teorema di Gerschgorin.
(e) Indicando con R_i e C_i, per $i = 1, 2$ i cerchi per riga e per colonna di A, si accerti se gli autovalori appartengono o meno all'insieme $(R_1 \cup C_1) \cap ((R_2 \cup C_2)$.

Esercizio 22 Si dica, senza calcolarli, se gli autovalori di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

possono essere tutti non reali. Detto λ_1 l'autovalore di massimo modulo, si dimostri che è reale positivo e si indichi un intervallo di appartenenza.

Esercizio 23 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcolino autovalori e autovettori di A;
(b) si dica se A è o non è diagonalizzabile, e perché .

Esercizio 24 Si costruisca una matrice quadrata di ordine 2, non diagonale, simmetrica, che abbia autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, e ammetta $\mathbf{x}^T = [1\ 2]$ come autovettore relativo a λ_1.

Esercizio 25 Data la matrice quadrata di ordine 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si calcolino il polinomio caratteristico e gli autovalori. Si calcolino anche gli autovettori relativi all'autovalore 0.

Esercizio 26 Date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Applicando il teorema di Gerschgorin si dia una limitazione al massimo modulo degli autovalori di A.
(b) Applicando il teorema di Gerschgorin a $B = SAS^{-1}$ si dica se A è invertibile e se la limitazione trovata al punto (a) è migliorabile.

Esercizio 27 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Si verifichi che $\mathbf{v} = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ è autovettore di A, per un opportuno autovalore α.
(b) Si trovi una limitazione inferiore e superiore del modulo degli autovalori di A.
(c) Si dimostri che $\max_i |\lambda_i| = \alpha$.

Esercizio 28
(a) Si calcoli il polinomio di interpolazione $p(x)$ che passa per i tre punti (1,1), (2,0), (3,0).
(b) Si determini il parametro α in modo che il polinomio

$$q(x) = p(x) + \alpha(x-1)(x-2)(x-3)$$

passi per (4,2).
(c) Si dica, spiegando perché, se $q(x)$ è il polinomio di interpolazione sui quattro punti (1,1), (2,0), (3,0) e (4,2).

Esercizio 29 Si considerino i quattro punti (-1,-1), (0,0), (1,1) e (2,1), e il corrispondente polinomio di interpolazione $p(x)$. Si calcoli poi il polinomio di regressione lineare $q(x)$, rispetto agli stessi punti. Si confrontino i grafici dei due polinomi.

Esercizio 30 Si consideri una matrice A simmetrica definita positiva di ordine 2, e siano λ_1 e λ_2 i suoi autovalori, con $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Si dimostri che, per i vettori $\mathbf{x}$ di lunghezza 1, la forma quadratica associata ad A è così limitata:

$$\lambda_1 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_2.$$