Esercizi proposti (marzo 2009)

Esercizio 1 Dato il sistema lineare:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 \end{array} \quad ,$$

lo si risolva con il metodo di Gauss.

Esercizio 2 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

se ne calcoli l'inversa:
– usando la matrice aggiunta;
– usando il metodo di Gauss applicato ai sistemi lineari $AX = I$.

Esercizio 3 Si considerino, per k reale, le matrici 3×3

$$A_k = \begin{bmatrix} k & k & k+2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Si determinino, al variare di k, le dimensioni di $N(A_k)$ e di $S(A_k)$, e si trovi per quali valori di k si ha $\mathbf{R}^3 = N(A) \bigoplus S(A)$.

Esercizio 4 Si consideri la matrice 4×4

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne determini il rango con il metodo di Gauss.

Esercizio 5 Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

si verifichi, con il metodo di Gauss, che esistono infinite soluzioni, e fra di loro si determini quella che ha la minima lunghezza euclidea.

Esercizio 6 Si considerino i sottospazi U e W di $\mathbf{R}^3$ generati rispettivamente dagli insiemi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino le dimensioni di $U+V$ e di $U \cap W$. Si indichi anche una base per $U+V$.

Esercizio 7 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix},$$

e si determinino tutte le matrici 2×2 X tali che $AX = O$, e si verifichi che formano uno spazio vettoriale.

Esercizio 8 Si calcolino i valori di k per i quali la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & k \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è invertibile, e si calcoli l'inversa, quando esiste.

Esercizio 9 Sono dati i vettori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gram-Schmidt, si trovino due vettori ortonormali $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$. Posto $X = [\,\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2\,]$ e $Y = [\,\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2\,]$:
- si calcoli Y^{-1} e si verifichi che $Y^{-1} = Y^T$;
- si calcoli $R = Y^{-1}X$ e si verifichi che R è triangolare superiore;
- si spieghi perché $r_{21} = 0$.

Esercizio 10 I coefficienti stechiometrici x_1, x_2, x_3, x_4, che bilanciano l'equazione

$$x_1 KMnO_4 + x_2 Ca_3(PO_4)_2 \rightarrow x_3 K_3PO_4 + x_4 Ca(MnO_4)_2$$

sono una delle infinite soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ottenuto bilanciando, per ogni elemento, le quantità che partecipano alla reazione, e pertanto formato da 5 equazioni. Anche se la matrice A non è quadrata, può essere applicato il metodo di Gauss per determinare il rango di A e l'insieme delle soluzioni. Si verifichi che:
- $\mathrm{rk}(A) = 3$;
- l'insieme delle soluzioni è lo spazio vettoriale generato da $[2 \;\; 1/3 \;\; 2/3 \;\; 1]^T$.

Qual è la soluzione intera di lunghezza minima?