Capitolo 4

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Abbiamo visto nel paragrafo 2.17 che la matrice associata ad una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dipende dalle basi scelte in $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$. Un problema interessante che si presenta quando $n = m$ è il seguente: esiste in $\mathbf{R}^n$ una base per cui la matrice associata ad f ha forma diagonale? Come vedremo in questo capitolo la risposta, che non è sempre affermativa, dipende da un insieme particolare di vettori legati alla matrice e detti *autovettori*.

4.1 Definizione.

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Un numero λ per cui esiste un vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tale che valga la relazione

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{1}$$

è detto *autovalore* di A ed $\mathbf{x}$ è detto *autovettore* corrispondente a λ. L'insieme degli autovalori di A costituisce lo *spettro* di A e il modulo massimo $\rho(A)$ degli autovalori è detto *raggio spettrale* di A.

4.2 Polinomio caratteristico.

Il sistema (1), che si può scrivere anche nella forma

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Sviluppando il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

con la (1, cap. 3), si vede che $\det(A-\lambda I)$ è un polinomio $p(\lambda)$ i cui coefficienti dipendono dagli elementi di A. Uno dei termini dello sviluppo è dato dal prodotto degli elementi principali di $A-\lambda I$ ed è uguale a $(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ e nessun altro termine dello sviluppo contiene più di $n-2$ fattori della forma $(a_{ii}-\lambda)$. Quindi il grado di $p(\lambda)$ è esattamente n e i coefficienti di λ^n e di λ^{n-1} risultano rispettivamente uguali a $(-1)^n$ e $(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})$. L'ultimo coefficiente è dato da $p(0)=\det A$. Si può quindi scrivere

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+(1)^{n-1}\mathrm{tr}A\ \lambda^{n-1}+\cdots+\det A,$$

in cui si è indicata con $\mathrm{tr}A$ la *traccia* di A, cioè la somma degli elementi principali di A.

Il polinomio $p(\lambda)$ è detto *polinomio caratteristico* di A e l'equazione $p(\lambda)=0$ è detta *equazione caratteristica* di A. Gli autovalori di A sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione caratteristica.

Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione caratteristica ha nel campo complesso n radici, tenendo conto della loro molteplicità. Quindi una matrice di ordine n ha, tenendo conto della loro molteplicità, n autovalori nel campo complesso.

Gli autovettori sono dunque le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo (2); quindi un autovettore corrispondente ad un autovalore λ risulta determinato a meno di una costante moltiplicativa $k\neq 0$, cioè se $\mathbf{x}$ è autovettore di A, anche $k\mathbf{x}$ è autovettore di A, corrispondente allo stesso autovalore.

Ad esempio, il polinomio caratteristico della matrice

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

si ricava dal determinante

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8.$$

L'equazione caratteristica corrispondente

$$\lambda^2-2\lambda-8=0$$

ha come radici $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=4$, che sono gli autovalori di A. L'autovettore corrispondente a $\lambda_1=-2$ si calcola risolvendo il sistema (2) che in questo caso diventa

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

Dalla prima equazione si ottiene $x_1 + x_2 = 0$, da cui $x_1 = -x_2$, e ne segue che qualunque vettore della forma

$$\mathbf{x}_1 = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k \neq 0,$$

è autovettore di A corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = -2$. L'autovettore corrispondente a $\lambda_2 = 4$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dalla prima equazione si ottiene $-x_1 + x_2 = 0$, da cui $x_1 = x_2$, e ne segue che qualunque vettore della forma

$$\mathbf{x}_1 = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k \neq 0,$$

è autovettore di A corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = 4$.

Se ripetiamo lo stesso procedimento con la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

si ricava dall'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

che gli autovalori sono $\lambda_1 = 2 + i$ e $\lambda_2 = 2 - i$. Risolvendo i sistemi (2) si ottengono gli autovalori $\mathbf{x}_1$ corrispondente a λ_1 e $\mathbf{x}_2$ corrispondente a λ_2 dove

$$\mathbf{x}_1 = k \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = k \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k \neq 0.$$

4.3 Somma e prodotto degli autovalori.

Dalle relazioni che legano i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica risulta che:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A. \tag{4}$$

4.4 Proprietà degli autovalori.

a) Gli autovalori di una matrice A diagonale o triangolare (superiore o inferiore) sono uguali agli elementi principali. Infatti la matrice $A - \lambda I$ è ancora diagonale o triangolare e quindi

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda).$$

b) Un autovalore λ di A è anche autovalore di A^T. Infatti

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I),$$

e quindi se $\det(A - \lambda I) = 0$ è $\det(A^T - \lambda I) = 0$.

Sia λ un autovalore di A e $\mathbf{x}$ un autovettore corrispondente. Allora

c) λ^i è autovalore di A^i e $\mathbf{x}$ è un autovettore corrispondente. Infatti

$$A^i\mathbf{x} = A^{i-1}A\mathbf{x} = A^{i-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda A^{i-1}\mathbf{x} = \lambda A^{i-2}A\mathbf{x} = \ldots = \lambda^i\mathbf{x}.$$

d) Se $B = b_0A^k + b_1A^{k-1} + \cdots + b_kI$, dove $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{R}$, allora $\mu = b_0\lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \cdots + b_k$ è autovalore di B e $\mathbf{x}$ è un autovettore corrispondente. Infatti

$$B\mathbf{x} = b_0A^k\mathbf{x} + b_1A^{k-1}\mathbf{x} + \cdots + b_k\mathbf{x} = b_0\lambda^k\mathbf{x} + b_1\lambda^{k-1}\mathbf{x} + \cdots + b_k\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}.$$

e) Se A è non singolare, allora $\lambda \neq 0$ e $1/\lambda$ è autovalore di A^{-1} con $\mathbf{x}$ autovettore corrispondente. Infatti da

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

si ha

$$\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$$

e quindi

$$\lambda \neq 0 \quad \text{e} \quad A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

Per esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

ha gli autovalori $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ e i corrispondenti autovettori sono

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A^{-1} ha gli autovalori $1/\lambda_1 = -\sqrt{2}-1$, $1/\lambda_2 = 1$, $1/\lambda_3 = \sqrt{2}-1$ e gli stessi autovettori di A. La matrice

$$B = 3A^2 - A + 2I = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

ha gli autovalori

$$\mu_i = 3\lambda_i^2 - \lambda_i + 2, \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3,$$

cioè $\mu_1 = 10 - 5\sqrt{2}$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 10 + 5\sqrt{2}$ e gli stessi autovettori di A.

4.5 Molteplicità di un autovalore e autospazio corrispondente.

Sia λ un autovalore di A. Si chiama

molteplicità algebrica di λ, e si indica con $\sigma(\lambda)$, la molteplicità di λ come radice dell'equazione caratteristica,

autospazio di λ l'insieme V_λ di tutti gli autovettori corrispondenti a λ (è facile verificare che V_λ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$),

molteplicità geometrica di λ, e si indica con $\tau(\lambda)$, la dimensione di V_λ e quindi il massimo numero di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti a λ.

Se due autovalori sono distinti i corrispondenti autospazi sono disgiunti. Vale infatti il seguente teorema.

4.6 Teorema.

Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Dim. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m \leq n$, m autovalori di A a due a due distinti, e siano $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ i corrispondenti autovettori. Si procede per induzione su m.

Per $m = 1, \mathbf{x}_1 \neq 0$, quindi $\mathbf{x}_1$ è linearmente indipendente.

Per $m > 1$, si supponga per assurdo che esista una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ tale che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \tag{7}$$

in cui non tutti gli α_i siano nulli e sia j tale che $\alpha_j \neq 0$. In tal caso esiste almeno un altro indice $k \neq j$, per cui $\alpha_k \neq 0$; altrimenti, se ciò non fosse, seguirebbe che $\mathbf{x}_j = 0$. Moltiplicando entrambi i membri della (7) per A, si ottiene

$$\mathbf{0} = A \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, A\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \lambda_i \, \mathbf{x}_i, \tag{8}$$

moltiplicando entrambi i membri della (7) per λ_j, si ottiene

$$\mathbf{0} = \lambda_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \lambda_j \, \mathbf{x}_i. \tag{9}$$

Sottraendo membro a membro la (9) dalla (8), si ha:

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{x}_i.$$

Si ottiene così una combinazione lineare nulla degli $m - 1$ autovettori $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$, $\quad i = 1, \ldots, m, \; i \neq j$, in cui $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ per $i \neq j$ e gli α_i per $i \neq j$ non sono tutti nulli, essendo $\alpha_k \neq 0$, ciò che è assurdo perché per l'ipotesi induttiva gli $m - 1$ vettori sono linearmente indipendenti. ∎

Dal teorema 4.6 risulta che se A ha n autovalori tutti distinti e quindi tutti di molteplicità algebrica 1, allora A ha n autovettori linearmente indipendenti. Quindi l'autospazio corrispondente ad ogni autovalore ha dimensione 1.

Se A non ha n autovalori distinti, può avere n autovettori linearmente indipendenti oppure no.

Per esempio, la matrice identica I di $\mathbf{R}^{n \times n}$, che ha il solo autovalore 1, ha tutti i vettori $\mathbf{e}_i$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$ come autovettori, infatti è

$$I \, \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i, \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Quindi risulta $\tau(1) = \sigma(1) = n$.

Invece la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

ha 1 come autovalore di molteplicità algebrica n a cui corrispondono solo autovettori della forma $\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$, $k \neq 0$. In questo caso risulta quindi $\tau(1) = 1$ e $\sigma(1) = n$.

Vale sempre la disuguaglianza

$$1 \leq \tau(\lambda) \leq \sigma(\lambda) \leq n.$$

4.7 Matrici simili.

Ritorniamo al problema che ci eravamo posti all'inizio del capitolo: se A è la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, è possibile cambiare la base di $\mathbf{R}^n$ in modo che la matrice B associata ad f nella nuova base abbia forma diagonale? Dalla (18, cap. 2) segue che, se P è la matrice del cambiamento di base, le due matrici A e B sono legate dalla relazione

$$A = PBP^{-1}. \tag{10}$$

Due matrici $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ si dicono *simili* se esiste una matrice non singolare P per cui vale la (10). La trasformazione che associa la matrice A alla matrice B viene detta *trasformazione per similitudine*. Se la matrice P è tale che $P^TP = I$ (cioè le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$) la trasformazione viene detta *unitaria*.

La trasformazione per similitudine è una relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le proprietà degli autovalori e autovettori sono proprietà intrinseche dell'applicazione lineare e non legate solamente alla matrice che la rappresenta in una particolare base. Vale infatti il seguente teorema.

4.8 Teorema.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e geometriche.

Dim. Siano A e B matrici simili, cioè tali che $A = PBP^{-1}$. Si ha:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det\left[P(B - \lambda I)P^{-1}\right] \\ &= \det P \det(B - \lambda I) \det(P^{-1}) = \det(B - \lambda I)\end{aligned}$$

per cui le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche. Se $\mathbf{x}$ è autovettore di A corrispondente all'autovalore λ, risulta:

$$PBP^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

e quindi

$$BP^{-1}\mathbf{x} = \lambda P^{-1}\mathbf{x}.$$

Perciò il vettore $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ è autovettore di B corrispondente a λ. Inoltre, essendo P^{-1} non singolare, se $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, \tau(\lambda)$, sono autovettori linearmente indipendenti di A, anche $\mathbf{y}_i = P^{-1}\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, \tau(\lambda)$ sono linearmente indipendenti. Quindi A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità geometriche. ∎

Da questo teorema risulta che se due matrici sono simili, hanno uguali la traccia e il determinante.

4.9 Matrici diagonalizzabili.

Una matrice A simile ad una matrice diagonale D si dice *diagonalizzabile*.

4.10 Teorema.

Una matrice A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti. Inoltre le colonne della matrice P, per cui $P^{-1}AP$ è diagonale, sono gli autovettori di A.

Dim. Si suppone dapprima che A abbia n autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Siano D la matrice diagonale avente λ_i come i-esimo elemento principale, e P la matrice la cui i-esima colonna è uguale a $\mathbf{x}_i$. Dalla relazione

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

si ha anche che

$$AP = PD. \tag{11}$$

Essendo P non singolare, perché formata da colonne linearmente indipendenti, esiste P^{-1}; quindi dalla (11) si ha

$$A = PDP^{-1}.$$

Viceversa, sia $A = PDP^{-1}$, D matrice diagonale con gli autovalori di A come elementi principali. Allora risulta $AP = PD$. Indicando con $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ le colonne di P, si ha:

$$A\,[\mathbf{p}_1 \,|\, \mathbf{p}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{p}_n] = [\lambda_1 \mathbf{p}_1 \,|\, \lambda_2 \mathbf{p}_2 \,|\, \cdots \,|\, \lambda_n \mathbf{p}_n]$$

e quindi

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Perciò le colonne di P sono n autovettori di A, che risultano linearmente indipendenti, perché P è non singolare. ∎

Per esempio, le matrici A definita in (5) e $B = 3A^2 - A + 2I$ definita in (6) hanno entrambe tre autovalori distinti e gli stessi tre autovettori linearmente indipendenti. Quindi sono diagonalizzabili dalla stessa trasformazione per similitudine. Posto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

si ha

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{2}/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & \sqrt{2}/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

e

$$A = P \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$B = P \begin{bmatrix} 10 - 5\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + 5\sqrt{2} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Dai teoremi 4.6 e 4.10 segue che se una matrice ha tutti gli autovalori distinti, allora è diagonalizzabile, in quanto ha n autovettori linearmente indipendenti. Se una matrice non ha tutti gli autovalori distinti, può non essere diagonalizzabile e questo accade se per almeno un autovalore di A la molteplicità geometrica è minore della corrispondente molteplicità algebrica.

Vi è un'importante classe di matrici che sono sicuramente diagonalizzabili anche se hanno autovalori non tutti distinti. Si tratta delle matrici simmetriche.

4.11 Matrici simmetriche.

Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ si dice *simmetrica* se $A^T = A$.

L'insieme delle matrici simmetriche è chiuso rispetto all'operazione di inversione, mentre non lo è rispetto all'operazione di moltiplicazione, infatti se $A = A^T$ e $A = B^T$, è

$$(AB)^T = B^T A^T = BA \neq AB.$$

4.12 Teorema.

Gli autovalori delle matrici simmetriche sono reali.

Dim. Supponiamo per assurdo che la matrice A simmetrica abbia un autovalore complesso $\lambda = a + \mathbf{i}b$, con $b \neq 0$. La matrice $A - \lambda I$ è singolare, quindi è singolare anche la matrice

$$B = (A - \lambda I)(A - \overline{\lambda} I) = (A - aI)^2 + b^2 I.$$

Sia $\mathbf{x}$ un autovettore di B relativo all'autovalore 0; risulta

$$0 = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A - aI)^2 \mathbf{x} + b^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

Posto $\mathbf{y} = (A - aI)\mathbf{x}$, dalla simmetria di A segue che

$$\mathbf{y}^T \mathbf{y} + b^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0,$$

e questo è assurdo perché $\mathbf{y}^T\mathbf{y} \geq 0$ e $\mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0$ e $b \neq 0$. ■

Una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile. Vale infatti il seguente teorema.

4.13 Teorema.

Sia A una matrice simmetrica di ordine n e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora A è diagonalizzabile per trasformazione unitaria.

Dim. Si procede per induzione. Per $n = 1$ la tesi vale con $P = [1]$. Per $n > 1$, consideriamo un autovalore λ_1, che è sicuramente reale e un corrispondente autovettore normalizzato $\mathbf{x}_1$ a elementi reali. Sia S lo spazio generato da $\mathbf{x}_1$. Indicata con $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ una base ortonormale dello spazio $S^\perp$, la matrice

$$Q = [\,\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{y}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{y}_n\,]$$

è tale che $Q^T Q = I$ e $Q^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$. La matrice

$$B = Q^T A Q$$

è simmetrica, infatti si ha

$$B^T = (Q^T A Q)^T = Q^T A^T Q = Q^T A Q = B.$$

Poiché la prima colonna di B è

$$B\mathbf{e}_1 = Q^T A Q \mathbf{e}_1 = Q^T A \mathbf{x}_1 = Q^T \lambda_1 \mathbf{x}_1 = \lambda_1 Q^T \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1,$$

B può essere partizionata nel modo seguente:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix},$$

dove $A_1 \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ è ancora simmetrica. Per l'ipotesi induttiva A_1 è diagonalizzabile per trasformazione unitaria, cioè esiste una matrice $U \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tale che

$$U^T U = I \quad \text{e} \quad A_1 = U A_2 U^T,$$

dove $A_2 \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ è diagonale. Allora risulta

$$A = QBQ^T = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} Q^T = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U A_2 U^T \end{bmatrix} Q^T$$

$$= Q \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U^T \end{bmatrix} Q^T.$$

La matrice

$$P = Q \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix}$$

è tale che

$$P^T P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U^T \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U^T U \end{bmatrix} = I,$$

e

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ & \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} P^T,$$

da cui la tesi, essendo A_2 matrice diagonale. ∎

Poichè le colonne di P sono gli autovettori di A, da questo teorema segue che una matrice simmetrica ha n autovettori ortonormali.

Per esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

è simmetrica. I suoi autovalori sono $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 9$ e $\lambda_3 = 18$. I corrispondenti autovettori sono

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

È facile verificare che gli autovettori sono ortogonali. Per ottenere la matrice P occorre però normalizzare gli autovettori, moltiplicandoli per $1/3$. Si ottiene così

$$A = PDP^T,$$

dove

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

4.14 Forma quadratica associata ad una matrice simmetrica.

Si chiama *forma quadratica* associata ad una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una espressione della forma $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Espandendo questa espressione rispetto alle componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di $\mathbf{x}$, si vede che la forma quadratica è uguale ad un polinomio di secondo grado omogeneo nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se la matrice A è simmetrica, la forma quadratica si può esprimere in modo molto semplice in termini degli autovalori di A. Infatti dal teorema 4.13 si ha

$$A = PDP^T, \quad \text{dove} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T PDP^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y},$$

avendo posto $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$, e quindi

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [y_1, \ldots, y_n]\, D \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \tag{12}$$

4.15 Teorema.

Sia A una matrice simmetrica di ordine n. Allora le due condizioni:

a) la forma quadratica $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ è positiva per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

b) gli autovalori di A sono tutti positivi,

sono equivalenti.

Dim.

a) $\Rightarrow$ b) Sia λ un autovalore e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un autovettore corrispondente; da $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, premoltiplicando per $\mathbf{x}^T$, si ottiene

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x},$$

in cui il primo membro è positivo, ed essendo $\mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0$, risulta $\lambda > 0$.
b) $\Rightarrow$ a) Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Dalla (12) segue che

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A, che per il teorema 4.12 sono reali, e $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$. Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, anche $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, perché P è non singolare. Ne segue che $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ perché $\lambda_i > 0$ per $i = 1, \ldots, n$ e gli y_i non sono tutti nulli. ∎

4.16 Matrici definite positive.

Le matrici simmetriche che soddisfano alle condizioni del teorema 4.15 sono dette *definite positive* e si presentano spesso nelle applicazioni.

Poiché il prodotto degli autovalori di una matrice è uguale al determinante, dal teorema 4.15 segue che il determinante di una matrice definita positiva è positivo. Segue inoltre che l'inversa di una matrice definita positiva è ancora definita positiva. Infatti l'inversa A^{-1} di una matrice simmetrica A è simmetrica, e gli autovalori di A^{-1} sono positivi in quanto reciproci di quelli di A.

Per esempio, la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

è definita positiva, infatti per ogni vettore $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \neq \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (2x_1 - x_2)^2 + (2x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 > 0.$$

Il suo polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9),$$

e gli autovalori sono tutti positivi.

4.17 Forma canonica o normale di Jordan.

Abbiamo visto che una matrice è diagonalizzabile solo se possiede n autovettori linearmente indipendenti Viene allora da chiedersi se non sia possibile trovare una forma abbastanza vicina a quella diagonale a cui ridurre la matrice nel caso più generale in cui vi siano meno di n autovettori linearmente indipendenti. A questa domanda risponde la seguente *forma canonica o normale di Jordan.*

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ e siano $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, p$, i suoi autovalori distinti, con molteplicità algebrica $\sigma(\lambda_i)$ e molteplicità geometrica $\tau(\lambda_i)$. Allora A è simile ad una matrice diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{bmatrix},$$

in cui il blocco J_i, relativo all'autovalore λ_i, ha ordine $\sigma(\lambda_i)$ ed è a sua volta diagonale a blocchi

$$J_i = \begin{bmatrix} C_i^{(1)} & & & \\ & C_i^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_i^{(\tau(\lambda_i))} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

e ognuno dei $\tau(\lambda_i)$ blocchi è della forma

$$C_i^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{\nu_i^{(j)} \times \nu_i^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tau(\lambda_i),$$

dove gli interi $\nu_i^{(j)}$ sono tali che

$$\sum_{j=1}^{\tau(\lambda_i)} \nu_i^{(j)} = \sigma(\lambda_i).$$

La matrice J è detta *forma canonica (o normale) di Jordan* della matrice A, ed è unica, a meno dell'ordinamento dei blocchi che la compongono.

Se gli autovalori λ_i di A sono tutti distinti, i blocchi J_i hanno tutti ordine 1, e quindi la matrice è diagonalizzabile. Se invece gli autovalori non sono tutti distinti, ma A ha n autovettori linearmente indipendenti, allora i blocchi J_i sono diagonali, e anche in questo caso la matrice è diagonalizzabile.

È possibile che matrici diverse abbiano gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e geometriche e siano riconducibili alle rispettive forme di Jordan con la stessa trasformazione per similitudine.

Per esempio, le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 4 & -8 & 6 & -3 \\ -5 & 7 & 5 & -8 & 6 & -3 \\ -4 & 4 & 6 & -7 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & 3 & -4 & 6 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -10 & 8 & -6 & 4 \\ -5 & 12 & -9 & 8 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & -6 & 8 & -6 & 4 \\ -3 & 6 & -16 & 8 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

hanno entrambe l'autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica 6 e geometrica 3, ma forme di Jordan diverse, come risulta dalle reazioni seguenti:

$$A_1 = PJ'P^{-1} = P \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 0 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

e

$$A_2 = PJ''P^{-1} = P \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 0 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1},$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.18 Localizzazione degli autovalori.

Il calcolo effettivo degli autovalori di una matrice non è facile, soprattutto quando la matrice è di grandi dimensioni. Si deve ricorrere a metodi numerici, che in generale sono iterativi e quindi richiedono di possedere una stima, magari non molto precisa, dell'autovalore che si vuole approssimare. Talvolta la precisione con cui si vogliono calcolare gli autovalori è così bassa che anche una stima un po' grossolana può bastare. La stima più semplice si ottiene dal teorema di Gerschgorin.

4.19 Cerchi di Gerschgorin.

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. I cerchi del piano complesso

$$K_i = \{\, z \in \mathbf{C} \;:\; |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\,\},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

di centro a_{ii} e raggio $r_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|$ sono detti *cerchi di Gerschgorin.*

4.20 Teorema di Gerschgorin.

Gli autovalori della matrice A di ordine n sono tutti contenuti in

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} K_i.$$

Dim. Sia λ un autovalore di A e $\mathbf{x}$ un autovettore corrispondente, ossia

$$A\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x},\;\; \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Allora si ha:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \lambda\, x_i,\;\; i = 1, \ldots, n,$$

da cui

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j,\;\; i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Sia x_p la componente di $\mathbf{x}$ di massimo modulo, cioè quella per cui

$$|x_p| = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| \neq 0, \tag{14}$$

e, ponendo $i = p$ nella (13), si ha:

$$(\lambda - a_{pp})x_p = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} a_{pj}\, x_j;$$

da cui:

$$|\lambda - a_{pp}|\; |x_p| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}|\, |x_j|,$$

e, per la (14),

$$|\lambda - a_{pp}|\; |x_p| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}|\; |x_p|;$$

infine dividendo per $|x_p| > 0$, si ottiene

$$|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}|,$$

e quindi $\lambda \in K_p$. Si osservi che, poiché a priori non è noto il valore dell'indice p, è possibile solo dire che λ appartiene all'unione di tutti i cerchi K_i. ∎

Poiché il teorema precedente può essere applicato anche alla matrice A^T, che ha gli stessi autovalori della matrice A, risulta che gli autovalori di A appartengono anche all'unione dei cerchi

$$H_i = \{\, z \in \mathbf{C} \,:\, |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ji}|\,\},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

e quindi gli autovalori di A appartengono all'insieme

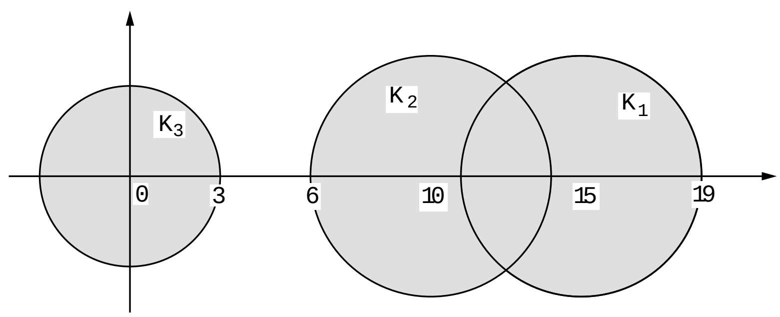
$$\Big(\bigcup_{i=1,\ldots,n} K_i\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{i=1,\ldots,n} H_i\Big).$$

Per esempio, i cerchi di Gerschgorin della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sono

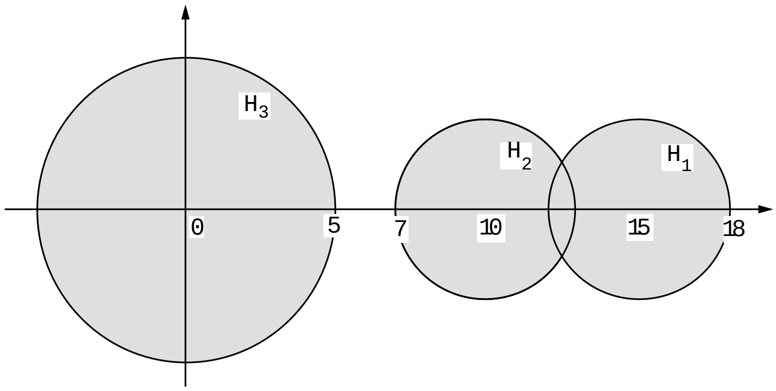
$$\begin{aligned} K_1 &= \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z - 15| \le 4\}, \\ K_2 &= \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z - 10| \le 4\}, \\ K_3 &= \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| \le 3\}. \end{aligned}$$



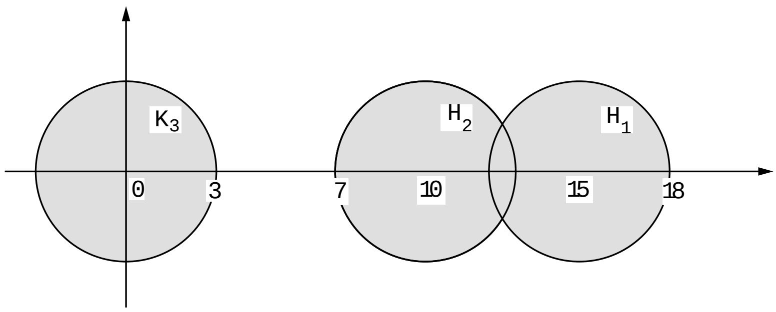
Per il teorema gli autovalori stanno nelle aree grigie. Consideriamo poi i cerchi

$$\begin{aligned} H_1 &= \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z - 15| \le 3\}, \\ H_2 &= \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z - 10| \le 3\}, \\ H_3 &= \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| \le 5\}, \end{aligned}$$

associati alla matrice A^T.



Quindi gli autovalori di A stanno nell'intersezione dei due insiemi di cerchi



Si può poi dimostrare che se l'unione M_1 di k cerchi di Gerschgorin è disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti $n-k$, allora k autovalori appartengono a M_1 e $n-k$ autovalori appartengono a M_2.

Dei tre autovalori della matrice A dell'esempio, uno è contenuto in K_3, mentre gli altri due appartengono ad $H_1 \cup H_2$. I due autovalori contenuti in $H_1 \cup H_2$ possono essere reali o complessi e hanno modulo compreso fra 7 e 18. L'autovalore contenuto in K_3 è reale; infatti, se avesse parte immaginaria non nulla, anche il suo coniugato dovrebbe essere un autovalore di A, essendo zero di un polinomio a coefficienti reali, e apparterrebbe ancora a K_3, mentre sappiamo che in K_3 c'è un solo autovalore.

4.21 Predominanza diagonale.

Un'altra classe importante di matrici è quella delle matrici a predominanza diagonale, che si presentano spesso nella risoluzione numerica di problemi differenziali.

Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ si dice *a predominanza diagonale in senso stretto* se per ogni $i = 1, \ldots, n$ risulta

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{ij}|.$$

La definizione di predominanza diagonale in senso stretto si può dare anche per colonne, considerando le somme per colonne anziché per righe e in tal caso si specifica che la predominanza diagonale in senso stretto è per colonne.

4.22 Teorema.

Una matrice a predominanza diagonale in senso stretto è non singolare. Se inoltre A ha elementi principali tutti reali e positivi, allora gli autovalori di A hanno parte reale positiva e se A è anche simmetrica, allora A è definita positiva.

Dim. Se A è a predominanza diagonale in senso stretto i cerchi di Gerschgorin, avendo raggio minore della distanza del centro dall'origine del piano complesso, non possono includere l'origine, e quindi A non può avere un autovalore nullo.

Se inoltre A ha elementi principali tutti positivi, nessun cerchio può contenere numeri complessi a parte reale negativa. Quindi se A è anche simmetrica, cioè con autovalori reali, questi devono essere positivi, e quindi la matrice è definita positiva. ∎

Poiché gli autovalori della matrice A sono uguali a quelli della matrice A^T, le tesi del teorema 4.22 valgono anche nel caso in cui la predominanza diagonale in senso stretto della matrice sia per colonne.

4.23 Esercizi.

- **1.** Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Si definisce *traccia* di A la somma dei termini principali di A:

  $$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

  Dimostrare che

  $$\begin{aligned} &\text{tr } (A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B,, \\ &\text{tr } (\alpha A) = \alpha \text{ tr } A, \ \alpha \in \mathbf{R}, \\ &\text{tr } (AB) = \text{tr } (BA), \\ &\text{tr } (AA^T) = \text{tr } (A^T A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2. \end{aligned}$$

• **2.** Dimostrare che l'insieme delle matrici simmetriche è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione $n(n+1)/2$.

• **3.** Dimostrare che una matrice simmetrica e triangolare è diagonale.

• **4.** Dire per quali valori dei parametri α e β la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

è a) simmetrica b) definita positiva.

•• **5.** Siano A e B due matrici simmetriche. Far vedere con un esempio che la matrice AB non è sempre simmetrica e dimostrare che lo è se e solo se A e B commutano.

• **6.** Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Dimostrare che se A è simmetrica, anche adj$A$ e A^{-1} sono simmetriche.

• **7.** Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Verificare che le matrici AA^T, A^TA, e $A+A^T$ sono simmetriche e che, se A non è singolare, le matrici A^TA e AA^T sono definite positive.

•• **8.** Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matrice definita positiva. Dimostrare che
a) gli elementi principali sono positivi,
b) l'elemento di massimo modulo è un elemento principale.
(Traccia: imporre la condizione che la forma quadratica $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$, dove
$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, per $i = 1, \ldots, n$ nel caso a) e $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, per $i, j = 1, \ldots, n$ nel caso b).)

• **9.** Determinare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

•• **10.** Calcolare autovalori e autovettori delle matrici

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

•• **11.** Dire se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 20 \end{bmatrix}$$

ha un autovalore maggiore o uguale a 20.
(Traccia: verificare che $\det(A - 20I) < 0$.)

•• **12.** Verificare che il raggio spettrale della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è maggiore di 2.

••• **13.** Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ la matrice i cui elementi sono dati da

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{per } i = j, \\ 1 & \text{per } i < j, \\ 0 & \text{per } i > j. \end{cases}$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di A e A^T.
(Traccia: tenendo presente l'esercizio 13 cap. 3, dimostrare che $A = XDX^{-1}$ e $A^T = X^{-T}DX^T$, dove

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}.)$$

••• **14.** Siano $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Dimostrare che le matrici AB e BA hanno gli stessi autovalori. Se A e B sono singolari, è possibile che AB e BA, pur avendo gli stessi autovalori, non siano simili: esaminare il caso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Traccia: se una delle due matrici, ad esempio A, è non singolare, è $AB = A(BA)A^{-1}$, e quindi le matrici AB e BA sono simili. In generale, se $\lambda \neq 0$ è autovalore di AB, cioè $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, allora

$B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $(BA)B\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$. Quindi λ è autovalore di BA. Se AB è singolare, anche BA lo è.)

•• **15.** Dimostrare che gli autovalori della matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ i cui elementi sono dati da

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{se } i = 1,\ j = n \text{ e } j = i-1,\ \text{per } i = 2,\dots,n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = 1$, sono i numeri

$$\lambda_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi k}{n},\ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

(Traccia: calcolare il polinomio caratteristico.)

•• **16.** Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \neq 0$. Verificare che A non può essere diagonalizzata.

•• **17.** Sia A la matrice diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{bmatrix},$$

con blocchi diagonali quadrati.

a) Dimostrare che lo spettro degli autovalori di A è dato dall'unione degli spettri dei blocchi $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$;
b) dimostrare che la stessa proprietà vale se la matrice A è triangolare a blocchi;
c) dire come sono fatti gli autovettori di A.

••• **18.** Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Determinare autovalori e autovettori delle matrici

$$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T \quad \text{e} \quad I + \mathbf{x}\mathbf{y}^T.$$

(Traccia: tenere conto che la matrice $\mathbf{x}\mathbf{y}^H$ ha rango 1 e che $\mathbf{x}\mathbf{y}^H\mathbf{x} = (\mathbf{y}^H\mathbf{x})\mathbf{x}$; quali sono i vettori $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ tali che $\mathbf{x}\mathbf{y}^H\mathbf{z} = \mathbf{0}$?)

••• **19.** Siano A e $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Dimostrare che lo spettro degli autovalori della matrice

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

è costituito dall'unione degli spettri delle matrici

$$A + B \quad \text{e} \quad A - B,$$

e che gli autovettori di C sono i vettori

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix},$$

in cui $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono gli autovettori di $A + B$ e $A - B$.

•• **20.** Dire quante e quali sono le matrici di ordine 6, non simili fra di loro, il cui polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = (3 - \lambda)^4 (1 - \lambda)^2.$$

(Traccia: due matrici simili hanno la stessa forma normale di Jordan.)

•• **21.** Dire se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ha autovalori complessi.
(Traccia: sfruttare il teorema di Gerschgorin.)

• **22.** Si calcolino gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si determinino anche gli autovettori relativi all'autovalore di modulo minimo.

•• **23.** Sia A la matrice $2n \times 2n$ i cui elementi a_{ij} sono definiti nel modo seguente:

$$a_{i,2n+1-i} = 1 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n, \quad a_{i,2n+1-i} = -1 \quad \text{per } i = n+1, \ldots, 2n,$$

$$a_{ij} = 0, \quad \text{altrimenti.}$$

Si calcolino il determinante e gli autovalori di A.

• **24.** Per quali valori reali di k la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha un autovalore di molteplicità (algebrica) 2?

•• **25.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita dai valori

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad f(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

che assume sui vettori della base canonica, si consideri la matrice A associata ad f, e si trovi una base di $\mathbf{R}^2$ rispetto alla quale la matrice associata ad f risulta diagonale.

•• **26.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Si calcolino autovalori e autovettori di A. Si dica se A è diagonalizzabile, e, in tal caso, si indichi una matrice S tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.

•• **27.** Si dimostri che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile con una trasformazione per similitudine.

•• **28.** È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se è diagonalizzabile per similitudine, e in tal caso si determini una matrice che la diagonalizza. È possibile diagonalizzare A con una trasformazione unitaria?

•• **29.** Si dica se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile con una trasformazione per similitudine sui reali. Se lo è, si determini una matrice di trasformazione S. Si dica se è possibile scegliere S unitaria.

•• **30.** Si calcolino tutti gli autovalori della matrice $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nell'ipotesi che n sia pari, si calcolino gli autovettori relativi all'autovalore di modulo minimo.

• **31.** Si determinino autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se A è diagonalizzabile. Senza eseguire altri calcoli, si dica se A^2 è diagonalizzabile.

•• **32.** Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{z}$ tre vettori ortonormali di $\mathbf{R}^n$, con $n \geq 3$. Si dimostri che la matrice $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{v}\mathbf{u}^T$ è singolare (suggerimento: si consideri il vettore $A\mathbf{z}$). Per $n = 3$ e $\mathbf{u} = 1/\sqrt{3}[1\ 1\ 1]^T$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{2}[1\ 0\ -1]^T$, si calcolino gli autovalori di A.

• **33.** Si calcolino autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A è diagonalizzabile per similitudine?

• **34.** Si calcolino autovettori e autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• **35.** Si dica se la matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine.

•• **36.** Si stabilisca se la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine.

• **37.** Si dica se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine.