Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 4/7/2011

Esercizio 1

a) L'errore inerente risulta

$$\epsilon_{in} = \frac{xf'(x)}{f(x)}\,\epsilon_x = -\,\frac{x(2x+1)}{x^2+x+1}\,\epsilon_x.$$

In modulo per $x \in [0,2]$ è $|\epsilon_{in}| < 10/7\,u$. Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è ben condizionato.

b) Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon_1 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \frac{x^3}{x^3-1}\,\big(\epsilon_2+\epsilon_3\big),$$

dove ϵ_1 è l'errore locale di $x-1$, ϵ_2 e ϵ_3 sono gli errori locali di x^2 e x^3, ϵ_4 è l'errore locale di x^3-1 e ϵ_5 è l'errore locale della divisione. Quindi

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\left(3+\frac{2x^3}{|x^3-1|}\right).$$

Il primo algoritmo non risulta stabile nell'intorno di 1. Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \eta_4 - \eta_3 - \frac{x^2+x}{x^2+x+1}\,\eta_2 - \frac{x^2}{x^2+x+1}\,\eta_1,$$

dove η_1 è l'errore locale di x^2, η_2 è l'errore locale di x^2+x, η_3 è l'errore locale di x^2+x+1 e η_4 è l'errore locale della divisione. Quindi

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\left(2+\frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\right) < \frac{24}{7}u.$$

Il secondo algoritmo risulta stabile per ogni $x \in [0,2]$. Inoltre in $[\,0\ 1)$ si ha

$$\left(3+\frac{2x^3}{|x^3-1|}\right) \ge 3 > \left(2+\frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\right),$$

mentre in $(1\ 2\,]$ si ha

$$\left(3+\frac{2x^3}{|x^3-1|}\right) > 5 > \left(2+\frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\right),$$

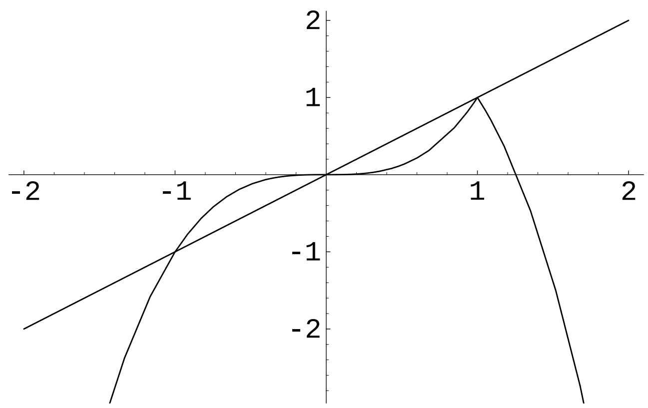
la maggiorazione del secondo algoritmo è sempre inferiore a quella del primo algoritmo. Quindi il secondo algoritmo è preferibile.

Esercizio 2

(a) È

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \leq 1, \\ 2 - x^3 & \text{per } x > 1, \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{per } x \leq 1, \\ -3x^2 & \text{per } x > 1, \end{cases}$$

Quindi nel punto $x = 1$ la $g(x)$ è continua ma non derivabile. Il grafico di $y = x$ e $y = g(x)$ è



L'equazione $x = g(x)$ ha tre soluzioni $\alpha = -1$, $\beta = 0$ e $\gamma = 1$, le prime due di molteplicità 1. Per la terza soluzione non si può definire la molteplicità in quanto il rapporto $|f(x)|/|x-1|$ non ha limite per $x \to 1$.

b) Il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ non è convergente ad α e γ. Converge con ordine 3 a β per $x_0 \in (-1, \sqrt[3]{3})$.

Esercizio 3

a) Se i cerchi di Gerschgorin sono disgiunti, ognuno pu'o contenere un solo autovalore, che quindi deve essere reale. Imponiamo allora questa condizione.

Considerando i cerchi per riga, si ha:
il primo cerchio ha centro in α e raggio $n-1$,
l'i-esimo cerchio per $i > 1$ ha centro in $i\,\alpha$ e raggio $n-i+1$.
Quindi il primo cerchio è disgiunto dal secondo se $\alpha + n - 1 < 2\alpha - (n-1)$.
In generale l'i-esimo cerchio è disgiunto dall'$(i+1)$-esimo se $i\,\alpha + n - i + 1 < (i+1)\,\alpha - (n-i)$. Tutti i cerchi sono disgiunti se $\alpha > 2n - 2$.

Considerando i cerchi per colonna si ottiene la stessa codizione per α.

b) La matrice ha predominanza diagonale se $\alpha > n-1$, quindi la condizione imposta al punto a) garantisce la predominanza. La matrice di iterazione di

Jacobi risulta

$$J = -\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1/(n-1) \\ & & & 1/n & 0 \end{bmatrix}$$

e $\|J\|_\infty = (n-1)/\alpha < 1/2$. Il metodo di Jacobi converge.

Esercizio 4

a) È $p(x) = (x^2 + x + 2)/2$.

b) Il resto è

$$r(x) = x(x-1)(x-2)\,\frac{f'''(\xi)}{3!} = x(x-1)(x-2)\,\frac{\log 2^3\, 2^\xi}{3!}, \quad \xi \in (0, x).$$

La frazione è sempre positiva, quindi il resto si annulla solo nei punti 0, 1 e 2. Ne segue che non esistono altri punti in cui $p(x)$ e $f(x)$ coincidono.

c) Usando la formula del resto si ha

$$\left|r\Big(\frac{3}{2}\Big)\right| < \frac{3}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{\log 2^3\, 2^{3/2}}{6} = \frac{\log 2^3}{4\sqrt{2}} \sim 0.059.$$

In realtà

$$\left|f\Big(\frac{3}{2}\Big) - p\Big(\frac{3}{2}\Big)\right| = \left|2\sqrt{2} - \frac{23}{8}\right| \sim 0.047.$$