Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 6/11/2014

Esercizio 1

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\, f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + \dfrac{x \cos x}{\sin x}}{\log(x \sin x)}.$$

Per $x \in (0, \pi/4)$ è $x \sin x \neq 1$, quindi il denominatore $\log(x \sin x)$ è $\neq 0$. Ne segue che la funzione c_x è continua in $(0, \pi/4)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} c_x = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{2\log x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to \pi/4} c_x = c_{\pi/4} = \frac{1+\pi/4}{\log[\pi/(4\sqrt{2})]}$$

Quindi $|c_x|$ è limitata in $(0, \pi/4)$ e il problema risulta ben condizionato per ogni x.

L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(3)} + \frac{\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)}}{\log(x \sin x)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo di $\sin x$ e $x \sin x$ e $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale del calcolo del logaritmo. Maggiorando in modulo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\Big(1 + \frac{2}{|\log(x \sin x)|}\Big),$$

che è limitato per $x \in (0, \pi/4)$. Più in dettaglio si può vedere che $\big|\epsilon_{alg}^{(1)}\big| < 5u$. L'errore algoritmico per il secondo algoritmo è

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon^{(6)} + \frac{\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(4)} \log x + \epsilon^{(5)} \log(\sin x)}{\log(x \sin x)},$$

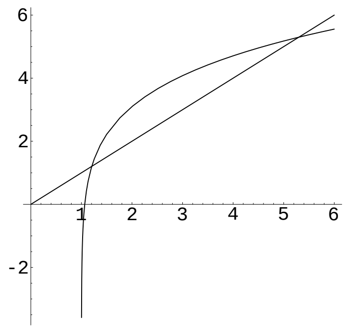
dove $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali del calcolo di $\log x$ e $\log(\sin x)$ e $\epsilon^{(6)}$ è l'errore locale dell'addizione. Maggiorando in modulo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\Big(1 + \frac{1 + |\log x| + |\log(\sin x)|}{|\log(x \sin x)|}\Big) < u\Big(1 + \frac{1 + |\log(\pi/4)| + |\log(\sin(\pi/4)|}{|\log((\pi/4 \sin(\pi/4))|}\Big).$$

Anche il secondo algoritmo è limitato per ogni $x \in (0, \pi/4)$, e più in dettaglio si ha $\big|\epsilon_{alg}^{(2)}\big| < 4u$. Quindi entrambi gli algoritmi sono stabili.

Esercizio 2

La funzione $g(x)$ è definita per $|x| > 1$. Per $x > 1$ i grafici di $y = x$ e $y = g(x)$ sono



Vi sono due soluzioni $\alpha \in (1, 2)$ e $\beta \in (5, 6)$, entrambe di molteplicità 1. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},$$

positiva e decrescente per $x > 1$. Nell'intervallo $(1, 2)$ è $g'(x) > g'(2) = 4/3$, quindi $g'(\alpha) > 1$ e α non è punto attrattivo. Invece nell'intervallo $(5, 6)$ è $g'(x) < g'(5) = 5/12$ per cui β è punto attrattivo. Geometricamente dal grafico si vede che le successioni generate dal metodo iterativo convergono a β per ogni $x_0 > \alpha$ in modo monotono. Poich'e $g'(\beta) \neq 0$ l'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 3

Si nota che la terza riga è uguale alla somma della prima riga più la seconda moltiplicata per 2. Quindi $\det A = 0$. Per il metodo di Jacobi si ha

$$J == D^{-1}(B + C) = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/8 & 0 & -1/4 \\ -8/9 & -1/9 & 0 \end{bmatrix}.$$

È

$$p_J(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{95}{144}\,\lambda + \frac{49}{144} = (1 - \lambda)\Big(\lambda^2 + \lambda + \frac{49}{144}\Big).$$

Oltre all'autovalore $\lambda = 1$ vi sono due autovalori complessi coniugati di modulo 7/12. Quindi $\rho(J) = 1$ e il metodo non è convergente. Per il metodo di Gauss-Seidel si ha

$$G = (D - B)^{-1}C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 1/80 & 1/8 & 0 \\ -13/144 & -1/72 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 3/16 & -5/16 \\ 0 & -65/48 & 23/48 \end{bmatrix},$$

da cui si ricava che

$$p_G(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{2}{3}\,\lambda^2 + \frac{\lambda}{3}.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/3$, $\lambda_3 = 0$. Quindi $\rho(G) = 1$ e il metodo non è convergente.

In alternativa si può procedere nel modo seguente. Il polinomio caratteristico di J è

$$p_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \det(D^{-1}(B+C) - \lambda I) = \det(D^{-1})\det(B+C-\lambda D).$$

Per $\lambda = 1$ si ha $p_J(1) = \det(D^{-1})\det(B+C-D) = \det(D^{-1})\det(-A) = 0$. Quindi uno degli autovalori di J è uguale a 1 e il metodo di Jacobi non è convergente. Lo stesso ragionamento si applica al metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 4

È $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = 3$. Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = \frac{1}{21}\,(-2x^2 + 31x - 54).$$

Il resto è

$$r(x) = f(x) - p(x) = (x-2)(x-3)(x-9)\frac{f'''(\xi)}{3!}, \quad \text{con} \quad \xi \in (2,9).$$

È

$$f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3 \log 2}, \quad \text{quindi} \quad |f'''(\xi)| \le f'''(2) = \frac{2}{\log 2}.$$

Posto $\pi(x) = (x-2)(x-3)(x-9)$, è $\pi'(x) = 3x^2 - 28x + 51$ e $\pi'(x) = 0$ nei punti $\overline{x}_{1,2} = (14 \pm \sqrt{43})/3$ che sono i punti stazionari di $\pi(x)$. Sostituendo tali punti in $\pi(x)$ si ottengono i due valori $(-520 \pm 86\sqrt{43})/27$. Si ha perciò

$$\max_{x\in[2,9]} |\pi(x)| = \frac{520 + 86\sqrt{43}}{27} \sim 40.1,$$

e

$$\max_{x\in[2,9]} |r(x)| < 40.1\,\frac{2}{6\log 2} \sim 19.3.$$

In realtà quella che si è ottenuta è una grossolana sovrastima, come si può vedere facendo direttamente la derivata di

$$r(x) = \log_2(x-1) - \frac{1}{21}\,(-2x^2 + 31x - 54).$$

$r'(x) = 0$ per le x soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$4x^2 - 31x + 31 + \frac{21}{2\log 2} = 0.$$

Con l'approssimazione $\log 2 \sim 0.623$ si ottengono le due soluzioni 2.42 e 6.33. Il massimo di $|r(x)|$ si ottiene in corrispondenza della seconda soluzione e vale ~ 0.55.