Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 1/2/2012

Esercizio 1

Per l'errore inerente si ha

$$c_x = -\frac{x^3}{(1-x^2)(x - 1/2\log\frac{1+x}{1-x})}.$$

Si osserva inoltre che $c_{-x} = c_x$, e quindi basta studiare c_x nell'intorno destro di 0 e nell'intorno sinistro di 1.
Per $x = 0$ si annulla il denominatore di c_x ma esiste il $\lim_{x\to 0_+} c_x = 3$.
Per $x = 1$ c_x non è definito, ma esiste il $\lim_{x\to 1_-} c_x = +\infty$.
Dunque la funzione è bencondizionata nell'intorno di 0 e malcondizionata nell'intorno destro di -1 e nell'intorno sinistro di 1.

Per l'errore algoritmico si ottiene

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(5)} - \frac{1}{2}\frac{\log\frac{1+x}{1-x}}{f(x)}\epsilon^{(4)} - \frac{1}{2}\frac{1}{f(x)}(\epsilon^{(3)} - \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(1)}),$$

dove gli errori $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$, $\epsilon^{(4)}$, $\epsilon^{(5)}$, sono gli errori locali della somma $1+x$, della differenza $1-x$, della divisione $\frac{1+x}{1-x}$, del logaritmo, e della differenza $x - 1/2\log\frac{1+x}{1-x}$, rispettivamente, avendo ritenuto nullo l'errore locale della divisione per 2. Tenendo conto dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to -1_+}\left|\frac{\log\frac{1+x}{1-x}}{f(x)}\right| = \lim_{x\to 1_-}\left|\frac{\log\frac{1+x}{1-x}}{f(x)}\right| = 2,$$

$$\lim_{x\to -1_+}\frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x\to 1_-}\frac{1}{|f(x)|} = 0,$$

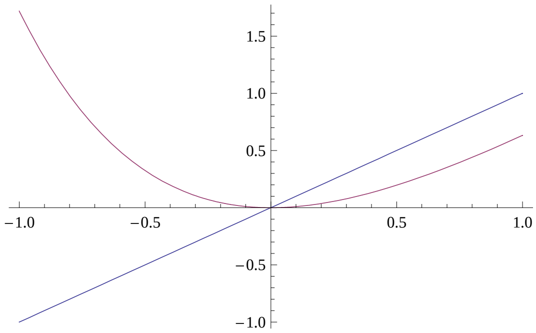
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\log\frac{1+x}{1-x}}{f(x)}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|f(x)|} = +\infty,$$

si conclude che l'algoritmo è stabile nell'intorno destro di -1 e nell'intorno sinistro di 1, ed è instabile nell'intorno di 0.

Esercizio 2

a) L'equazione $x = g(x)$ non può avere soluzioni negative, in quanto $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Infatti è $1 - \mathrm{e}^{-x} < 0$ per $x < 0$ e $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$ per $x > 0$. Inoltre, per $x > 0$ è $1 - \mathrm{e}^{-x} < 1$, per cui $x(1 - \mathrm{e}^{-x}) < x$. Ne segue che $g(x) \neq x$ per $x \neq 0$ e quindi l'equazione non ha altre soluzioni oltre a $\alpha = 0$.

b) Dal grafico di $y = x$ e $y = g(x)$ risulta evidente che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ converge in modo monotono decrescente per ogni $x_0 > 0$ e che se $x_0 < 0$ è $x_1 > 0$. Poich'e $g'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}(1-x)$ e $g''(x) = \mathrm{e}^{-x}(2-x)$, si



ha $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) = 2$. Quindi vi è convergenza del secondo ordine per ogni x_0.

Esercizio 3

a) Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Gli autovettori corrispondenti sono $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ (i due vettori della base canonica). Anche B ha gli stessi autovalori, ma gli autovettori sono

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice C è

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $p(\mu) = \mu^4 - 8\mu^2 + 4$, da cui si ricavano i quattro autovalori $\mu_1 = 1 + \sqrt{3}$, $\mu_2 = 1 - \sqrt{3}$, $\mu_3 = -1 + \sqrt{3}$, $\mu_4 = -1 - \sqrt{3}$. (Facoltativo: i corrispondenti autovettori di C sono

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_3 = \begin{bmatrix} -2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \\ 3+2\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_4 = \begin{bmatrix} -2+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ 3-2\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) La matrice C ha nulli due elementi principali. Quindi il metodo di Jacobi non può essere applicato direttamente alla matrice C. Se però si scambiano fra loro la seconda e la terza riga del sistema il metodo si può applicare. (Non richiesto: si può verificare che il raggio spettrale della matrice di iterazione di Jacobi applicato al sistema così ottenuto è minore di 1, quindi il metodo converge).

Esercizio 4

Dati due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1), la retta passante per essi ha equazione

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\,\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

come si può ricavare scrivendo il polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange. Nel caso in esame è

$$y_1 - y_0 = (1 - \sqrt{x_1}) - (1 - \sqrt{x_0}) = \sqrt{x_0} - \sqrt{x_1},$$

mentre

$$x_1 - x_0 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}),$$

quindi

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\,\frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}},$$

per cui

$$p(x) = 1 - \sqrt{x_0} - \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}} = 1 - \frac{x + \sqrt{x_0\, x1}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}}.$$

Il resto dell'interpolazione, dato da

$$r(x) = f(x) - p(x) = -\sqrt{x} + \frac{x + \sqrt{x_0\, x1}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}},$$

si annulla in x_0 e x_1, è positivo in $[0, x_0)$ e in $(x_1, 1]$ (se $x_1 \neq 1$), è negativo in (x_0, x_1) e presenta un punto di minimo in $\overline{x} \in (x_0, x_1)$. Quindi

$$\max_{x \in [0,1]} |r(x)| = \max \big\{ r(0), r(1), -r(\overline{x}) \big\}.$$

Il punto $\overline{x}$ è tale che $r'(\overline{x}) = 0$, cioè

$$\frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1}}, \quad \text{quindi} \quad \overline{x} = \frac{(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_1})^2}{4}.$$

Per il primo polinomio è $x_0 = 1/3$, $x_1 = 2/3$,

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}(1 - \sqrt{2})\, x \sim 0.662 - 0.717\, x,$$

$$r_1(0) = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sim 0.338, \quad r_1(1) = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}} \sim 0.0556,$$

$$\sqrt{\overline{x}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \sim 0.697, \quad \overline{x} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{12} \sim 0.486,$$

$$-r_1(\overline{x}) = \frac{-7 + 5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \sim 0.0103,$$

quindi $\epsilon_1 \sim 0.338$. Per il secondo polinomio è $x_0 = 1/4$, $x_1 = 1$,

$$p_2(x) = \frac{2}{3}\,(1-x), \quad r_2(0) = \frac{1}{3} \sim 0.333, \quad r_2(1) = 0,$$

$$\sqrt{\overline{x}} = \frac{3}{4}, \quad \overline{x} = \frac{9}{16} \sim 0.486, \quad -r_2(\overline{x}) = \frac{1}{24} \sim 0.0417$$

quindi $\epsilon_2 \sim 0.333$. Il secondo errore è minore.