Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 1/7/2009

Esercizio 1

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x \, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\, f'(x)}{f(x)} = \frac{x(\mathrm{e}^x - 1)}{\mathrm{e}^x - 1 - x}.$$

La funzione $f(x)$ si annulla solo nel punto $x = 0$. Usando la formula di Taylor si vede che in un intorno di $x = 0$ è

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad f'(x) \sim x, \quad \text{quindi} \quad c_x \sim 2.$$

Perciò l'errore inerente è limitato in tutto l'intervallo $[-1, 1]$, per cui il problema è ben condizionato. (Con un'analisi più approfondita si può verificare che c_x è una funzione positiva e crescente per ogni x, per cui $\max_{x\in[-1,1]} |c_x| \leq (\mathrm{e} - 1)/(\mathrm{e} - 2) \sim 2.4$)

L'errore algoritmico è

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(3)} + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{f(x)}\, \epsilon^{(2)} + \frac{\mathrm{e}^x}{f(x)}\, \epsilon^{(1)},$$

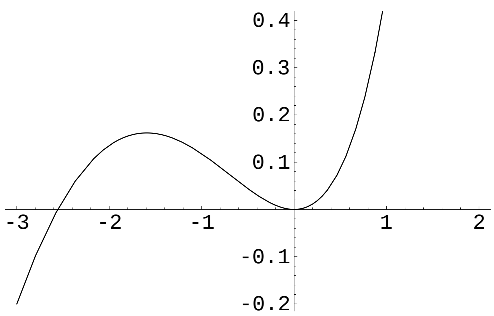
dove gli $\epsilon^{(i)}$ sono errori locali. In un intorno dello zero le due frazioni non sono limitate, quindi l'algoritmo non è stabile.

Esercizio 2

È evidente che l'equazione ha la soluzione $x = 0$. Poiché

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \frac{x}{2}, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{2},$$

la soluzione $x = 0$ ha molteplicità 2. Inoltre $f''(x)$ si annulla per $x = x_f = -\log 2 \sim -0.69$, è negativa per $x < x_f$ e positiva per $x > x_f$. Quindi esiste un punto $x_m < x_f$ in cui si annulla $f'(x)$. Il grafico di $f(x)$ risulta perciò



Indicata con α la soluzione compresa fra -3 e -2 e con β la soluzione nulla, il metodo delle tangenti converge ad α per $x_0 < x_m$ e a β per $x_0 > x_f$. Dal grafico si può anche dedurre la convergenza a β per $x_m < x_0 < x_f$. L'ordine del metodo è 2 per le successioni convergenti ad α e 1 per le successioni convergenti a β.

Esercizio 3

a) È

$$C = A\,B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D = B\,A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le due equazioni caratteristiche coincidono

$$p_C(\lambda) = p_D(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 15 = 0,$$

per cui entrambe le matrici hanno gli autovalori

$$\lambda = 2 \pm i\,\sqrt{11}.$$

b) Indicato con λ un autovalore di $A\,B$ e con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ il corrispondente autovettore, è

$$A\,B\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x},$$

da cui, moltiplicando a sinistra per B si ha

$$B\,A\,B\,\boldsymbol{x} = \lambda\,B\,\boldsymbol{x},$$

cioè

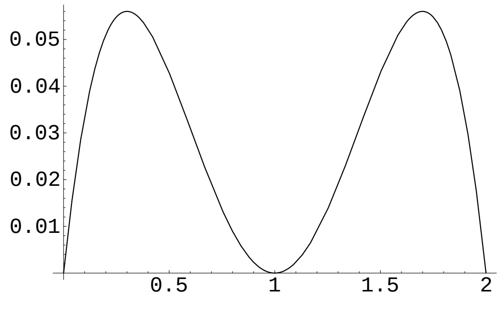
$$B\,A\,\boldsymbol{y} = \lambda\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = B\,\boldsymbol{x}.$$

Poiché $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ e B è non singolare, ne segue che $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, per cui $\boldsymbol{y}$ è l'autovettore di $B\,A$ corrispondente all'autovalore λ.

Esercizio 4

a) $g(x)$ ha grado 2 e assume gli stessi valori di $f(x)$ nei nodi. Infatti $f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 0$ e $f(2) = g(2) = 1$.

b) $r(x)$ si annulla nei nodi. Inoltre sia $f'(x)$ che $g'(x)$ si annullano in $x = 1$. Quindi $r'(x)$ si annulla in $x = 1$. Il grafico di $r(x)$ risulta



c) Dal teorema si ha

$$r(x) = x(x-1)(x-2)\frac{f'''(\xi)}{3!}.$$

Posto $\pi(x) = x(x-1)(x-2)$, è $\pi'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ e $\pi'(x) = 0$ per $1 \pm \sqrt{3}/3$. Risulta che $|\pi(x)|$ è massimo in uno di questi due punti, ed esattamente

$$\max_{x \in [0,2]} |\pi(x)| = \pi(1 - \sqrt{3}/3) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Inoltre è

$$\max_{x \in [0,2]} |f'''(x)| = \frac{\pi^3}{8}.$$

Quindi

$$\max_{x \in [0,2]} |r(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\pi^3}{48} \sim 0.25.$$