Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 10/6/2010

Esercizio 1

a) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = -\frac{3x^2-1}{x^2-1}.$$

Per $|x| > 1$ il denominatore di c_x tende a zero per $x \to \pm 1$, quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è mal condizionato per x vicino a 1 o a -1. Il problema è invece ben condizionato per x grande. Per l'errore algorimico della prima espressione si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(5)} + x^2\Big(\epsilon^{(3)} - \epsilon^{(2)} - \frac{x^2}{x^2-1}\,\epsilon^{(1)}\Big) - (x^2-1)\epsilon^{(4)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$, $\epsilon^{(4)}$, $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2, di x^2-1, della prima divisione, della seconda divisione e della sottrazione. Passando ai moduli e tenendo conto del fatto che $|x^2-1| = x^2-1$, si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\,\Big(3x^2 + \frac{x^4}{x^2-1}\Big).$$

Quindi il primo algoritmo è instabile per x vicino a 1 o a -1 e per $|x|$ grande.

b) Per l'errore algorimico della seconda espressione si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon^{(4)} - \big(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)} + \frac{x^2}{x^2-1}\,\epsilon^{(1)}\big),$$

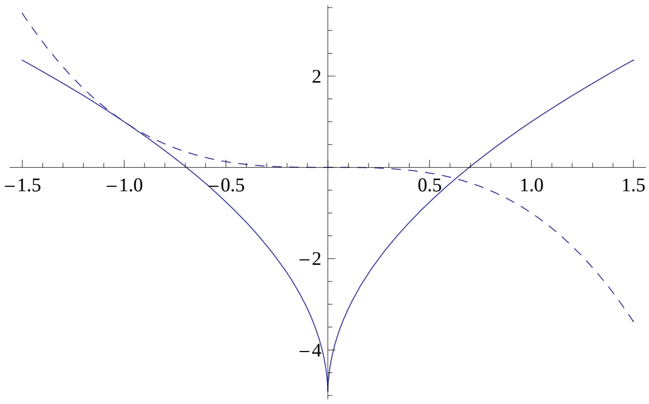
dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$, $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2, di x^2-1, della moltiplicazione e della divisione. Passando ai moduli si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\,\Big(3 + \frac{x^2}{x^2-1}\Big).$$

Quindi il secondo algoritmo è instabile per x vicino a 1 o a -1. Ne segue che il secondo algoritmo è preferibile per $|x|$ grande.

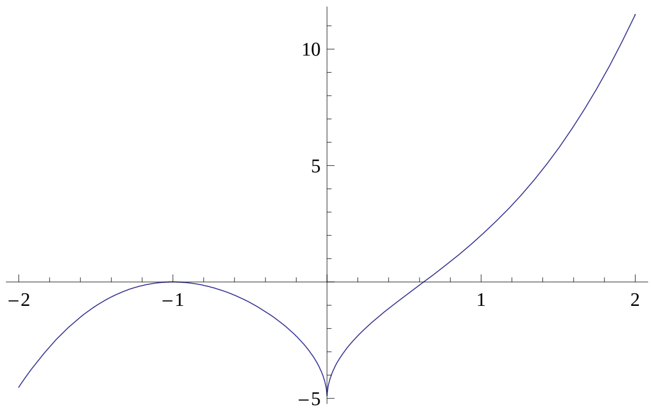
Esercizio 2

a) Per determinare quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$ si disegnano i grafici delle due funzioni $f_1(x) = -x^3$ (linea tratteggiata) e $f_2(x) = 6\sqrt{|x|}$ (linea continua).



Vi sono due soluzioni: $\alpha = -1$ (di molteplicità 2) e $0 < \beta < 1$ (di molteplicità 1).

b) Per studiare la convergenza del metodo delle tangenti si disegna anche il grafico di $f(x)$



La $f(x)$ non è derivabile nello zero. Per $x < 0$ sono verificate le condizioni sufficienti di convergenza, per cui si ha convergenza ad α per ogni $x_0 < 0$. Data la molteplicità di α l'ordine è 1. Per $x > 0$ la $f(x)$ è crescente ed ha un punto di flesso. Infatti

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x) = 6x - \frac{3}{2x^{3/2}}$$

e $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e $f''(x) = 0$ per $F = 8^{-2/5} \sim 0.435$. Poiché $F < \beta$, le condizioni sufficienti di convergenza valgono per $x_0 > \beta$. Comunque si ha convergenza a β anche per $x_0 < \beta$ in quanto il metodo genera una successione crescente di iterate, fino alla prima che supera β. L'ordine è 2.

Esercizio 3

a) Per esempio, per $n = 4$ è

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \beta \end{bmatrix}.$$

Le prime due righe di A sono linearmente indipendenti se $\alpha \neq \beta \neq 0$, quindi il rango è 2. Se $\alpha = \beta$ il rango è al più 1.
b) È

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice B ha diverse da zero solo le prime due righe. I primi due elementi della prima riga sono $\beta + (n-1)\alpha$ e $(n-1)\alpha$. I primi due elementi della seconda riga sono $(n-1)\beta - (n-1)\alpha$ e $(n-1)\beta - (n-1)\alpha$. Quindi il polinomio caratteristico di B è

$$p(x) = x^{n-2}\big(x^2 - n\beta x + (n-1)\beta(\beta - \alpha)\big).$$

c) Gli autovalori di A e di B coincidono. Per $\alpha \neq \beta$ sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità $n-2$ e

$$\lambda_{2,3} = \frac{n\beta \pm \sqrt{(n-2)^2\beta^2 + 4(n-1)\beta\alpha}}{2}.$$

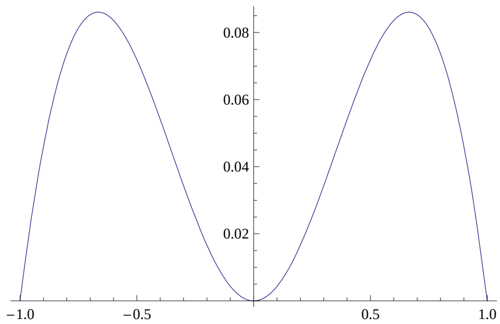
Per $\alpha = \beta \neq 0$ sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità $n-1$ e $\lambda_2 = n\beta$.
d) Se $(n-1)\beta(\beta - \alpha) > 1$, è $\alpha \neq \beta$ e il prodotto degli autovalori non nulli risulta maggiore di 1. Quindi anche il raggio spettrale risulta maggiore di 1.

Esercizio 4

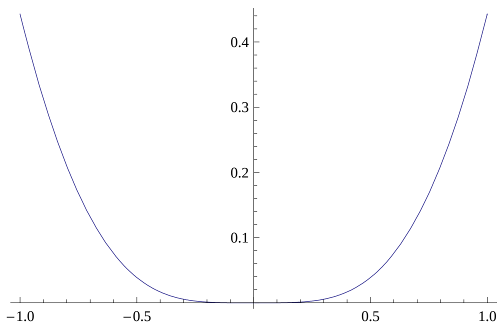
a) È

$$p(x) = x^2, \qquad q(x) = \frac{x^2}{\log 2}.$$

b) Il grafico di $|r(x)|$ è



e il grafico di $|s(x)|$ è



Quindi il massimo di $|r(x)|$ si trova in un punto intermedio fra 0 e 1, mentre il massimo di $|s(x)|$ si trova agli estremi. Per trovare il massimo di $|r(x)|$ si calcola lo zero δ di $r'(x)$ che appartiene all'intervallo $(0, 1)$. È $\delta = \sqrt{(1/\log 2) - 1} \sim 0.665$. Quindi il massimo è $r(\delta) \sim 0.086$. Invece il massimo di $|s(x)|$ è $|s(1)| = 1/\log 2 - 1 \sim 0.443$. Quindi $p(x)$ approssima $f(x)$ meglio di $q(x)$.