Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 10/2/2010

Esercizio 1

a) Non tutti i numeri di $\mathcal{F}$ la cui mantissa finisce con 0 sono pari. Ad esempio in $\mathcal{F}_{(2,3,3,4)}$ l'intero 3 si rappresenta come $2^2\ (.110)_2$. Sono interi positivi pari i numeri di $\mathcal{F}$ tali che

- $t > M$, che sono $2^{t-1}(M-t)$,
- $t = M$ e $d_t = 0$, che sono 2^{t-2},
- $t = M-1$ e $d_{t-1} = d_t = 0$, che sono 2^{t-3},
- $\vdots$
- $t = 2$ e $d_2 = \ldots = d_t = 0$, che è 1 solo.

In totale gli interi positivi pari sono

$$2^{t-1}(M-t) + \sum_{k=0}^{t-2} 2^k = 2^t(M-t) + 2^{t-1} - 1 = 2^{t-1}(M-t+1) - 1.$$

Aggiungendo lo 0 e gli interi negativi pari si ha $2^t(M-t+1)-1$.

b) Non tutti i numeri di $\mathcal{F}$ la cui mantissa finisce con 1 sono dispari. Ad esempio in $\mathcal{F}_{(2,3,3,4)}$ l'intero 10 si rappresenta come $2^4\ (.101)_2$. Sono interi positivi dispari i numeri di $\mathcal{F}$ tali che

- $p = t$ e $d_t = 1$, che sono 2^{t-2},
- $p = t-1$ e $d_{t-1} = 1,\ d_t = 0$, che sono 2^{t-3},
- $\vdots$
- $p = 2$ e $d_1 = d_2 = 1,\ d_3 = \ldots = d_t = 0$, che è 1 solo,
- $p = 1$ e $d_1 = 1,\ d_2 = \ldots = d_t = 0$, che è 1 solo.

In totale gli interi positivi dispari sono

$$\sum_{k=0}^{t-2} 2^k + 1 = 2^{t-1}.$$

Aggiungendo gli interi negativi dispari si ha 2^t.

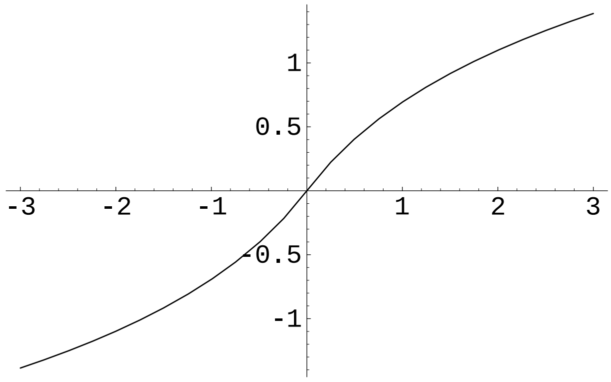
c) Per $M > t$ sono di più i numeri pari.

d) Nel caso particolare si hanno:

15 interi pari	$0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 10,\ \pm 12,\ \pm 14,$
8 interi dispari	$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 7.$

Esercizio 2

a) Poiché $f(0) = 0$, l'equazione $f(x) = 0$ ha la soluzione $\alpha = 0$. Dal grafico



risulta che l'equazione non ha altre soluzioni.

b) Il metodo delle tangenti è

$$x_{i+1} = g(x_i), \text{ dove } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \begin{cases} x - (1+x)\log(1+x) \text{ se } x \geq 0, \\ x + (1-x)\log(1-x) \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

È evidente dal grafico che il metodo delle tangenti produce una successione alternata. Per studiare la convergenza studiamo la $g(x)$.

$g(x)$ è continua e derivabile nello zero e si ha

$$g'(x) = \begin{cases} -\log(1+x) \text{ se } x \geq 0, \\ -\log(1-x) \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

$g'(x)$ è continua ma non derivabile nello zero, infatti

$$g''(x) = \begin{cases} -1/(1+x) \text{ se } x > 0, \\ 1/(1-x) \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi per studiare la convergenza non si possono utilizzare i teoremi 2.9 e 2.28.

c) Si nota che $|g'(x)| < 1$ per $|x| < \mathrm{E} - 1 \sim 1.7$. Quindi esiste un intorno di α in cui vale il teorema 2.14. Ne segue la convergenza locale del metodo delle tangenti.

d) Se scegliamo $x_0 \in (0, \rho]$, con $\rho = \mathrm{E} - 1$, si ha

$$x_1 < 0 \quad \text{e} \quad |x_1| = |g'(\xi)|\,|x_0|, \quad 0 < \xi < x_0,$$

quindi $|x_1| < |x_0|$. La stessa cosa accade se $x_0 \in [-\rho, 0)$. Ne segue che se $x_0 \in [-\rho, \rho]$ e $x_0 \neq 0$ la successione dei moduli $|x_i|$ è decrescente e tende a zero, in quanto non vi sono altre soluzioni dell'equazione.

Esercizio 3

Si ha, ad esempio per $n = 6$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è simmetrica, quindi è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono reali. Solo due righe sono linearmente indipendenti, quindi A ha $n-2$ autovalori nulli, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = 0$.

Dalla relazione che la matrice S deve soddisfare, cioè $SAS^{-1} = D$ si ricava, passando alla trasposta, che $S^{-T}A^TS^T = D^T$, ma A e D sono simmetriche, quindi $S^{-T}AS^T = D$. Ne segue che la matrice S^T deve avere come colonne gli autovettori di A, ovvero che la S deve avere come righe gli autovettori di A.

Per trovare gli autovettori corrispondenti agli autovalori nulli, si indica con x_i la i-esima componente di un generico vettore $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ e si impone che valga la relazione $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ne segue che gli autovettori cercati verificano

$$\sum_{i \text{ dispari}} x_i = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i \text{ pari}} x_i = 0.$$

Ad esempio, per $n = 6$ sono autovettori linearmente indipendenti i seguenti

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Per scrivere la S occorre trovare gli altri due autovalori λ_{n-1} e λ_n e i corrispondenti autovettori. Si può procedere in vari modi.

Primo modo: fare il calcolo per $n = 4$, trovando $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ e verificando che gli autovettori corrispondenti a λ_3 e a λ_4 sono dati rispettivamente dalla prima e dalla seconda colonna di A. Poi trovare gli autovettori corrispondenti all'autovettore nullo e infine generalizzare agli n pari maggiori di 2.

Secondo modo: Si nota che se si moltiplica A per la sua prima colonna si ottiene la prima colonna moltiplicata per $n/2$ e se si moltiplica A per la sua seconda colonna si ottiene la seconda colonna moltiplicata per $n/2$. Quindi si ha $\lambda_{n-1} = \lambda_n = n/2$ e gli autovettori corrispondenti sono la prima e la seconda colonna.

Terzo modo: Si nota che se si moltiplica A per se stessa si ottiene

$$\text{per } n=4,\ A^2 = 2\,A, \quad \text{per } n=6,\ A^2 = 3\,A, \quad \dots$$

Quindi gli autovalori della A soddisfano le relazioni:

$$\lambda^2 = 2\lambda \text{ per } n=4, \quad \lambda^2 = 3\lambda \text{ per } n=6, \quad \dots$$

Ne segue che i due autovalori non nulli di A devono essere uguali a 2 per $n=4$, uguali a 3 per $n=6$, e così via.

Quarto modo: permutare le righe di A in modo da portare in testa le righe con indice pari e fare la stessa permutazione sulle colonne della matrice ottenuta. Queste permutazioni corrispondono a costruire una matrice B simile alla A. Per esempio, per $n=6$ si ha $B = P\,A\,P^{-1}$, dove

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le due matrici A e B hanno gli stessi autovalori. (Attenzione: il solo scambio di righe o il solo scambio di colonne non danno una matrice simile alla A e quindi gli autovalori non si mantengono) Poiché la matrice B è diagonale a blocchi con blocchi uguali, i suoi autovalori sono quelli di un blocco ripetuti due volte. Quindi il problema è ricondotto a trovare gli autovalori di una matrice di dimensione $n/2$ tutta formata da 1. In questa matrice ridotta una sola riga è linearmente indipendente, quindi vi sono $n/2-1$ autovalori uguali a 0 e uno uguale alla traccia che è $n/2$.

Quinto modo: vedere la matrice A come formata da blocchetti identici 2 x 2. Per esempio, per $n=6$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il blocchetto I ha come autovettori $\boldsymbol{u}_1 = [1\ ,\ 0]^T$ e $\boldsymbol{u}_2 = [0\ ,\ 1]^T$. Si ha

$$A \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix},$$

indicando che 3 è autovalore di A e che il vettore ottenuto sovrapponendo per tre volte il vettore $\boldsymbol{u}_1$ è l'autovettore corrispondente. Lo stesso procedimento può essere applicato con il vettore $\boldsymbol{u}_2$, ottenendo che un altro autovalore è ancora uguale a 3 e trovando il secondo autovettore.

Esercizio 4

a) Si suppone che il metodo converga e si pone $\widehat{\boldsymbol{x}} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)}$. Allora

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = (I - \alpha\, A)\widehat{\boldsymbol{x}} + \alpha\, \boldsymbol{b},$$

da cui si ricava che $\widehat{\boldsymbol{x}}$ è la soluzione del sistema $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 7$. Quindi gli autovalori di $(I - \alpha\, A)$ sono $1-3\alpha$ e $1-7\alpha$. Il raggio spettrale della matrice di iterazione è

$$\rho = \max\{|1-3\alpha|, |1-7\alpha|\}.$$

Se $\alpha \leq 0$ è sicuramente $\rho \geq 1$. Altrimenti si ha

$$\rho = \begin{cases} 1-3\alpha & \text{se} \quad 0 < \alpha \leq 1/5, \\ 7\alpha - 1 & \text{se} \quad 1/5 < \alpha. \end{cases}$$

Nel primo caso è $\rho < 1$, nel secondo caso è $\rho < 1$ se $\alpha < 2/7$. Quindi vi è convergenza se $\alpha < 2/7$.

c) Il minimo di ρ si ha per il valore di α per cui $1 - 3\alpha = 7\alpha - 1$, cioè $\alpha = 1/5$.