Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 10/7/2015

Esercizio 1

(a) Il coefficiente di amplificazione è

$$c_x = \frac{3x^3}{x^3-1}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 1} |c_x| = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} c_x = 0, \quad \lim_{|x|\to +\infty} |c_x| = 3,$$

la funzione è malcondizionata nell'intorno di 1, ma ben condizionata per $|x|$ piccolo o per $|x|$ grande.

(b) Per il primo algoritmo si ha:

$$\epsilon_{alg_1} = \epsilon^{(3)} + \frac{x^3}{x^3-1}(\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del quadrato e del cubo rispettivamente, mentre $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale della differenza.

Per il secondo algoritmo si ha:

$$\epsilon_{alg_2} = \eta^{(5)} + \eta^{(1)} + \eta^{(4)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2-x}(\eta^{(3)} + 2\eta^{(2)}),$$

dove $\eta^{(1)}$ è l'errore locale di $x-1$, $\eta^{(2)}$ quello di $x+1$, $\eta^{(3)}$ quello di $(x+1)^2$, $\eta^{(4)}$ quello della differenza $(x+1)^2 - x$, e $\eta^{(5)}$ quello del prodotto.

Pertanto il primo algoritmo è instabile nell'intorno di 1, metre il secondo è stabile per ogni valore di x, infatti

$$|\epsilon_{alg_2}| < u(3 + \frac{3(x+1)^2}{(x+1)^2-x}) < 7u,$$

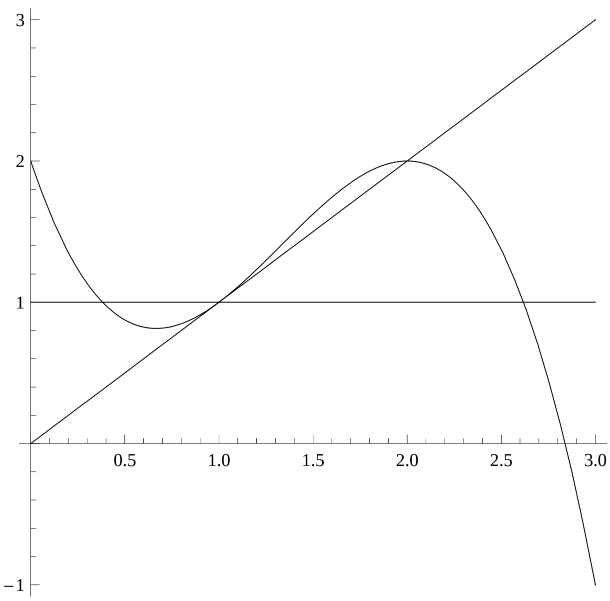
poiché

$$0 \le \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2-x} \le \frac{4}{3}.$$

Tuttavia per valori di $|x|$ piccoli o grandi l'errore del primo algoritmo è meglio limitato rispetto a quello del secondo.

Esercizio 2

Poiché $g(1) = 1$ e $g(2) = 2$, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ sono punti fissi di g. Il grafico della funzione $g(x)$ per $0 \le x \le 3$ è qui di seguito riportato



con la bisettrice del primo quadrante e la retta costante 1. Si ha

$$g'(x) = -3x^2 + 8x - 4, \quad g''(x) = -6x + 8, \quad g'(2/3) = g'(2) = 0,$$
$$g'(5/3) = 1, \quad g'(1) = 1.$$

Quindi per $\alpha = 1$ è possibile una convergenza sublineare, mentre per $\beta = 2$ si ha convergenza locale, del secondo ordine perché $g''(\beta) \neq 0$.
Applicando il teorema del punto fisso si ha convergenza monotona crescente sublineare ad α per $x_0 \in [2/3, 1]$, e convergenza monotona crescente di ordine due a β per $x_0 \in [5/3, 2]$, perché in entrambi gli intervalli $0 \leq g'(x) \leq 1$.
Sfruttando le proprietà della funzione messe in evidenza da grafico, ponendo $\gamma_1 = (3 - \sqrt{5})/2$ e $\gamma_2 = (3 + \sqrt{5})/2$ e tenendo conto che $g(\gamma_1) = g(\gamma_2) = 1$, si può aggiungere che:

per $0 \leq x_0 < \gamma_1$ si ha convergenza a β
per $\gamma_1 \leq x_0 \leq 1$ si ha convergenza ad α
per $1 < x_0 < \gamma_2$ si ha convergenza a β

Esercizio 3

(a) Il calcolo diretto mostra che $\|A\|_1 = 9 = \|A\|_\infty$. Alternativamente si può osservare che A è simmetrica e la norma uno ed infinito di una matrice simmetrica sono uguali.

(b) La matrice A è simmetrica e dalla teoria è noto che per le matrici simmetriche risulta
$$\mu_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

dove $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ sono il massimo e il minimo modulo degli autovalori di A. Utilizzando i cerchi di Gerchgorin si trova $\mu_2(A) \leq 9$.

(c) La matrice A ha predominanza diagonale in senso stretto, quindi il metodo di eliminazione di Gauss è applicabile senza scambi di righe. Si ottiene

$$A^{(5)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(d) Risulta $\det A = \det A^{(4)} = 4^4 = 256$. Il prodotto degli autovalori di A e il prodotto degli autovalori di $A^{(4)}$ coincidono perché entrambi uguali a $\det A$. In generale, gli autovalori non sono invarianti rispetto alle trasformazioni elementari di Gauss che non sono trasformazioni per similitudine. Nel caso specifico, gli autovalori di $A^{(4)}$ differiscono da quelli di A, perché le tracce delle due matrici non sono uguali.

Esercizio 4

(a) Risulta $f(0) = 1 = g(0)$, $f(1) = 0 = g(1)$, $f(2) = -1 = g(2)$ e quindi il polinomio di interpolazione è lo stesso per le due funzioni. I tre punti sono allineati, quindi il polinomio è $p(x) = 1 - x$.

(b) Risulta

$$r_f(x) = x(x-1)(x-2)\frac{\pi^3}{48}\sin\frac{\pi}{2}\xi \quad \text{e} \quad r_g(x) = x(x-1)(x-2).$$

In $[0,2]$ si trova che $\max|x(x-1)(x-2)| = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ e quindi

$$\max_{x\in[0,2]}|r_f(x)| \leq \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}} \sim 0.249 \quad \text{e} \quad \max_{x\in[0,2]}|r_g(x)| = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sim 0.385.$$

(c) Essendo $g(x)$ un polinomio di terzo grado, il polinomio di interpolazione di $g(x)$ su 5 nodi distinti coincide con $g(x)$. Ne segue che $r_g(x) = 0$.