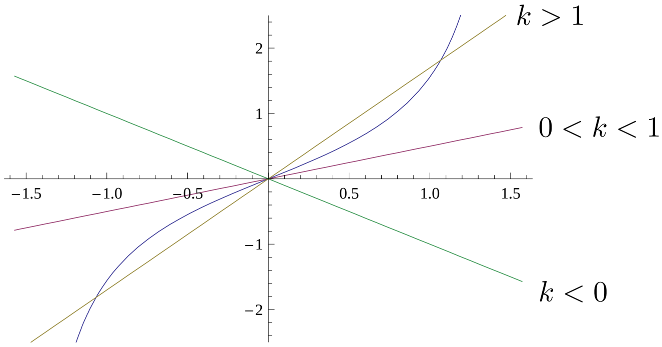
Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 11/1/2012

Esercizio 1

Poiché i numeri x_i sono di macchina, ciascun termine della sommatoria è affetto da un errore ϵ_i maggiorabile in modulo da $3\,u$. Procedendo come nel paragrafo 1.12 delle dispense e tenendo conto del fatto che $x_i > 0$, risulta $|\epsilon_{in}| < 3u$ e $|\epsilon_{alg}| < (n-1)u$. Quindi l'errore totale è $|\epsilon_{tot}| < (n+2)u$.

Esercizio 2

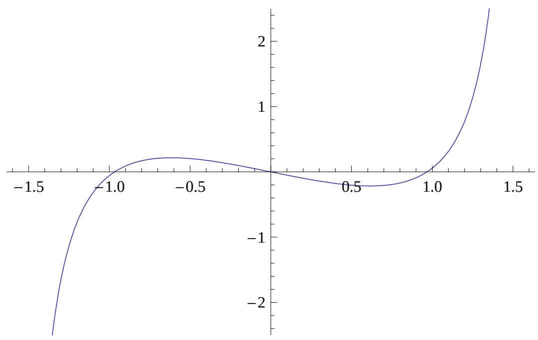
a) Dal grafico di $y = \tan x$ e $y = kx$ per tre valori $k > 1$, $0 < k < 1$ e $k < 0$



risulta evidente che nel primo caso vi sono tre soluzioni reali, mentre negli altri due casi vi è la sola soluzione nulla.

(b) Fissato un $k > 1$, siano α, β e γ le tre soluzioni, con $\alpha = -\gamma$ e $\beta = 0$. Si sceglie un x_0 diverso dalle soluzioni. Se $0 < x_0 < \gamma$, risulta $0 < x_{i+1} < x_i$ per ogni i, quindi la successione $\{x_i\}$ è monotona decrescente e limitata da 0, quindi convergente. Ne segue che la successione converge a β. Se invece $x_0 > \gamma$, risulta $x_{i+1} > x_i$ per ogni i, quindi la successione $\{x_i\}$ è monotona crescente. Non essendoci altre soluzioni a destra di γ, la successione risulta divergente. Per $x_0 < 0$ la situazione è quella simmetrica. L'ordine di convergenza a βè 1. Infatti $g(x) = \tan x/k$, $g'(x) = 1/(k\cos^2 x)$ e $g'(\beta) = 1/k \neq 0$.

(c) Per $k = 3/2$ vi sono tre soluzioni (vedere il prossimo grafico). Il metodo delle tangenti converge ad α per $-\pi/2 < x_0 < \alpha$ e a γ per $\gamma < x_0 < \pi/2$, in entrambi i casi con ordine 2. Più delicato è lo studio della convergenza alla soluzione β. Infatti, poiché $f(x)$ è derivabile con continuità almeno due volte, dal teorema in piccolo risulta che vi è convergenza locale a β. Ma il teorema in grande non è applicabile, perché non vi è alcun intervallo contenente β in cui $f(x)$ e $f''(x)$ sono concordi in segno, e quindi non è possibile dire a priori quanto grande sia l'intervallo di convergenza. L'ordine di convergenza a β è 3.



Esercizio 3

(a) Siano $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$. La i-esima riga della matrice A è data da

$$\boldsymbol{r}_i = [x_i\, y_1,\ x_i\, y_2,\ \ldots,\ x_i\, y_n].$$

Scegliendo un indice p tale che $x_p \neq 0$, ogni altra riga $\boldsymbol{r}_i$ con $i \neq p$ è data da $\boldsymbol{r}_i = x_i/x_p\, \boldsymbol{r}_p$. Perciò A ha una sola riga linearmente indipendente, e quindi il suo rango è 1. I suoi autovalori λ e autovettori $\boldsymbol{v}$ soddisfano la relazione $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, con $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, cioè $(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{v}$. Questa relazione è verificata da $\lambda = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$. Perciò $\boldsymbol{x}$ è autovettore di A corrispondente all'autovalore $\lambda = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$. Inoltre A ha l'autovalore 0, perché ha rango non massimo. In $\mathbf{R}^n$ la condizione $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v} = 0$ individua $n-1$ autovettori $\boldsymbol{v}$ linearmente indipendenti e ortogonali a $\boldsymbol{y}$ corrispondenti all'autovalore 0, che pertanto ha molteplicità algebrica almeno $n-1$. Se $\boldsymbol{x}$ è anch'esso ortogonale a $\boldsymbol{y}$, l'autovalore 0 ha molteplicità n, ma la matrice A ha comunque solo $n-1$ autovettori linearmente indipendenti, e quindi non è diagonalizzabile, mentre se $\boldsymbol{x}$ non è ortogonale a $\boldsymbol{y}$, la matrice A ha n autovettori linearmente indipendenti, e quindi è diagonalizzabile. Comunque $\rho(A) = \left|\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}\right|$. Poiché

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^TA) = \rho\big((\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\big) = \rho\big(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\big) = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\,\rho\big(\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T\big) = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}),$$

è

$$\|A\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y})}.$$

(b) Gli autovalori di B sono uguali a 1 più gli autovalori di A, quindi sono $1+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$ e 1, entrambi non nulli. Quindi B ha rango n. Gli autovettori sono gli stessi di A. È

$$B^TB = (I+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)^T(I+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T) = I + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T + (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T.$$

Le diverse matrici di questa somma non hanno gli stessi autovettori, quindi gli autovalori di B^TB non possono essere espressi mediante le somme degli autovalori delle singole matrici. Ma

$$\|B\|_2 = \|I+A\|_2 \le \|I\|_2 + \|A\|_2 \le 1 + \sqrt{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y})}.$$

Esercizio 4

a) È $f(1) = 1$, $f(2) = 10$, $f(3) = 35$ e $f(4) = 84$. Indicato con $p(n) = a_0 n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3$ il polinomio cercato, i coefficienti devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 27\,a_0 + 9\,a_1 + 3\,a_2 + a_3 = 10 \\ 125\,a_0 + 25\,a_1 + 5\,a_2 + a_3 = 35 \\ 343\,a_0 + 49\,a_1 + 4\,a_2 + a_3 = 84 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $a_0 = 1/6$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/3$ e $a_3 = 0$. Quindi

$$p(n) = \frac{n}{6}\,(n^2 + 3n + 2).$$

(b) Si ha $p(1) = 1$ e

$$p(n+2) = \frac{n+2}{6}\,((n+2)^2 + 3(n+2) + 2) = \frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{3} + 4,$$

e

$$p(n) + (n+2)^2 = \frac{n}{6}\,(n^2 + 3n + 2) + (n+2)^2 = \frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{3} + 4.$$

Quindi $p(n+2) = p(n) + (n+2)^2$ e, per induzione sui dispari, risulta $p(n) = f(n)$ per ogni n dispari.