Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 11/2/2014

Esercizio 1

È $f(x) = \cos(2x)$, quindi l'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = -\frac{2x\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2x\tan(2x).$$

Pertanto il calcolo di $f(x)$ è malcondizionato negli intorni dei punti in cui $\cos(2x) = 0$, quindi $x_k = (2k+1)\pi/4$ con $k = 0, 1, 2, 3$.
Per l'algoritmo $f(x) = (\cos x - \sin x)((\cos x + \sin x)$ si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(5)} + \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(3)} + 2\epsilon^{(1)} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 2\epsilon^{(2)} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali di $\cos x$ e di $\sin x$ rispettivamente e $\epsilon^{(3)}$, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali del calcolo della sottrazione, della addizione e della moltiplicazione. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\big(3 + 2\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{|\cos^2 x - \sin^2 x|}\big) = u\big(3 + \frac{2}{|\cos(2x)|}\big).$$

Per l'algoritmo $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \eta^{(3)} + \frac{2\sin^2 x}{\cos(2x)}\,(2\eta^{(1)} + \eta^{(2)}),$$

dove $\eta^{(1)}$ è l'erore locale del calcolo di $\sin x$, $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ sono gli errori locali del quadrato e della sottrazione. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < u\Big(1 + \frac{6\sin^2 x}{|\cos(2x)|}\Big).$$

Quindi entrambi gli algoritmoi non sono stabili negli intorni dei punti in cui $\cos(2x)$ si annulla, cioè $x = \pi/4,\ x = 3\pi/4,\ x = 5\pi/4,\ x = 7\pi/4$. Dal punto di vista della stabilità i due algoritmi sono equivalenti.

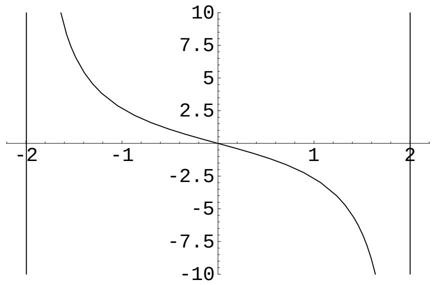
Esercizio 2

(a) È

$$f(x) = \frac{8x}{(x-2)(x+2)}.$$

Quindi vi è una soluzione reale $\alpha = 0$ di molteplicità 1. Vi sono due asintoti verticali $x = \pm 2$. Le derivate sono

$$f'(x) = -\frac{8(x^2+4)}{(x-2)^2(x+2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{16x(x^2+12)}{(x-2)^3(x+2)^3}.$$



Quindi nell'intervallo aperto $(-2, 2)$ è $f'(x) > 0$ e $f''(x) = 0$ solo per $x = 0$ (vedere il grafico di $f(x)$).
Il metodo delle tangenti genera successioni convergenti ad α in maniera monotona sia che si scelga $x_0 \in (0, 2)$ che $x_0 \in (-2, 0)$. Poiché $f'(\alpha) \neq 0$ e $f''(\alpha) = 0$, l'ordine di convergenza è maggiore di 2. Facendo anche la derivata terza di $f(x)$ si vedrebbe che $f'''(\alpha) \neq 0$, per cui l'ordine di convergenza è esattamente 3.
(b) Anche l'equazione $x = g(x)$ ha la sola soluzione reale $\alpha = 0$ di molteplicità 1, quindi è equivalente all'equazione $f(x) = 0$. La derivata della $g(x)$ è

$$g'(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2}$$

e nell'intervallo $[-0.5, 0.5]$ è $|g'(x)| > 1$. Quindi non vi è convergenza locale alla soluzione α. Il metodo non si può definire non convergente ad α perché se si sceglie $x_0 = 6$ si ha $x_1 = 0 = \alpha$, se si sceglie $x_0 = 2(3 + 2\sqrt{3})$ si ha $x_1 = 6$ e $x_2 = 0 = \alpha$, e così via.

Esercizio 3

(a) Basta verificare che $A(-A) = I$.
(b) Il numero di condizionamento in norma infinito di A è dato da

$$\text{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|-A\|_\infty = \|A\|_\infty^2 = \Big(\frac{1 + |\cos\theta|}{|\sin\theta|}\Big)^2$$

(c) Il sistema risulta malcondizionato negli intorni di θ in cui si annulla $\sin\theta$, cioè $\theta = k\pi$, con k intero.
(d) Per $\theta = \pi/6$ si ha $\text{cond}(A) = 1 + \sqrt{3}/2$.

Esercizio 4

(a) È $x_0 = -k\sqrt{3}/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = k\sqrt{3}/2$, $f(x_0) = -3k^3\sqrt{3}/8$, $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 3k^3\sqrt{3}/8$. Poiché $0 < k \leq 1$, tutti i nodi sono interni all'intervallo $[-1, 1]$. Il polinomio di interpolazione risulta $p(x) = 3k^2x/4$.
(b) È $f'''(x) = 6$. Quindi il resto è

$$r(x) = \pi(x)\,\frac{f'''(\xi)}{3!} = x\big(x^2 - \frac{3k^2}{4}\big).$$

È $r'(x) = 0$ per $x_\pm = \pm k/2$, quindi

$$M = \max_{x\in[-1,1]} |r(x)| = \max\{|r(1)|, |r(k/2)|\} = \max\{1 - 3k^2/4, k^3/4\}$$

Per $k \in (0, 1]$, M è minimo se $1 - 3k^2/4 = k^3/4$, cioè $k = 1$ e vale $M = 1/4$.
Il grafico di $r(x)$ per $k = 1$ è