Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 11/7/ 2008

Esercizio 1

Per l'errore algoritmico della $f(x)$ si ha

$$\left|\epsilon_{alg}(f)\right| < u\Big(2 + \frac{4\,|x|^5}{|x^5-1|}\Big),$$

per l'errore algoritmico della $g(x)$ si ha

$$\left|\epsilon_{alg}(g)\right| < u\Big(2 + \frac{3\,x^4}{|x^4-1|}\Big),$$

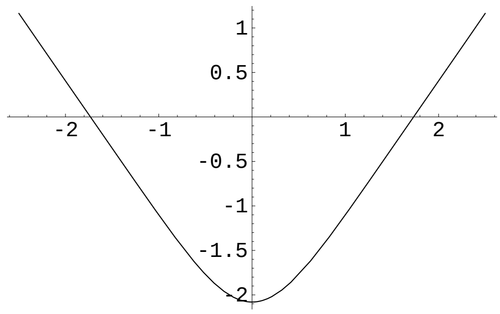
per l'errore analitico relativo della $g(x)$ si ha

$$\left|\epsilon_{an}\right| = \frac{x^4}{1+x+x^2+x^3|}.$$

I due errori algoritmici non sono limitati nell'intorno sinistro di 1 e sono limitati all'esterno di tale intorno. Nell'intorno destro di 0 la limitazione per il primo algoritmo è migliore di quella per il secondo. $|\epsilon_{an}|$ si annulla in 0 e in 1 assume il massimo che vale 1/4. Quindi nell'intorno sinistro di 1 entrambi gli algoritmi sono instabili, mentre nell'intorno di 0 è preferibile il primo.

Esercizio 2

a) Poiché il denominatore di $f(x)$ è positivo per ogni x, l'equazione data ha le stesse soluzioni dell'equazione $x^2-3=0$, e quindi $\alpha=-\sqrt{3}$ e $\beta=\sqrt{3}$ con molteplicità 1. Inoltre $f(x)=f(-x)$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. La f' si annulla solo in 0 (punto di minimo) e la f'' si annulla solo in α e β ma non cambia segno, quindi la funzione non cambia concavità. Il grafico è



b) Per $x_0 > 0$ il metodo delle tangenti costruisce una successione convergente a β, monotona a partire da x_0 se $x_0 > \beta$, a partire da x_1 altrimenti. Poiché la molteplicità è 1, l'ordine di convergenza è almeno 2. Per $x_0 < 0$ ragionare per simmetria.

c) (1^o modo) Il metodo delle tangenti ha la forma

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{con} \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^4 + 18x^2 + 9}{4x(3 + x^2)}.$$

Si verifica che $g(\beta) - \beta$, $g'(\beta) = g''(\beta) = g'''(\beta) = 0$, $g''''(\beta) \neq 0$. Quindi il metodo ha ordine 4.

(2^o modo) si verifica che $f'(\beta) \neq 0$, $f''(\beta) = f'''(\beta) = 0$, $f''''(\beta) \neq 0$.

(3^o modo, il migliore) si verifica che

$$g(x) - \beta = \frac{(x - \beta)^4}{4x(3 + x^2)}.$$

Quindi

$$\lim_{x->\beta} \frac{|g(x) - \beta|}{|x - \beta|^4} = \frac{1}{24\sqrt{3}}.$$

Esercizio 3

(a) È $\det A = -(5 + \sqrt{2})/2 \neq 0$.

(b) È

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di J sono $\lambda_1^{(J)} = 0$, $\lambda_{2,3}^{(J)} = \pm\mathbf{i}/2\,\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, gli autovalori di G sono $\lambda_{1,2}^{(G)} = 0$, $\lambda_3^{(G)} = -1/4\,(1 + \sqrt{2})$.

c) Il metodo che converge più velocemente è quello che ha il raggio spettrale più piccolo. Poiché $\rho(G) = 1/4\,(1 + \sqrt{2}) < \rho(J) = 1/2\,\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, il metodo migliore risulta quello di Gauss-Seidel.

Esercizio 4

Si ha

$$p(x) = \frac{1}{36}(19 - 5x).$$

Nell'intervallo $[2, 3]$ si ha $|r(x)| = |f(x) - p(x)| = p(x) - f(x)$. Questa funzione è derivabile e la sua derivata si annulla in $\alpha = (72/5)^{1/3} = 2.43288$. quindi

$$\max_{x \in [2,3]} |r(x)| = |r(\alpha)| = 0.0209276$$

Se invece si considera l'espressione del resto data dal teorema si ha

$$|r(x)| \leq \max_{x\in[2,3]} |(x-2)(x-3)| \max_{x\in[2,3]} \frac{3}{x^4} \leq \frac{1}{4}\,\frac{3}{16} = \frac{3}{64} = 0.046875.$$