Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 12/1/2015

Esercizio 1

L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = -1 - \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\, x \,\cos x}{1 - \mathrm{e}^{\sin x}}.$$

Poiché nell'intorno di 0 è $\mathrm{e}^{\sin x} \sim 1 + \sin x$, si ha

$$\lim_{x->0^+} c_x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x->\pi^-} c_x = -\infty,$$

il calcolo di $f(x)$ è malcondizionato solo nell'intorno di π.
L'errore algoritmico è

$$\epsilon_{\text{alg}} = \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(3)} - \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x f(x)} \Big(\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(1)} \,\sin x\Big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo di $\sin x$ e $\mathrm{e}^{\sin x}$ e $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali della sottrazione e della divisione finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\Big(2 + \frac{(1 + \sin x)\,\mathrm{e}^{\sin x}}{x|f(x)|}\Big).$$

Quindi l'algoritmo non è stabile sia nell'intorno di 0 che di π.

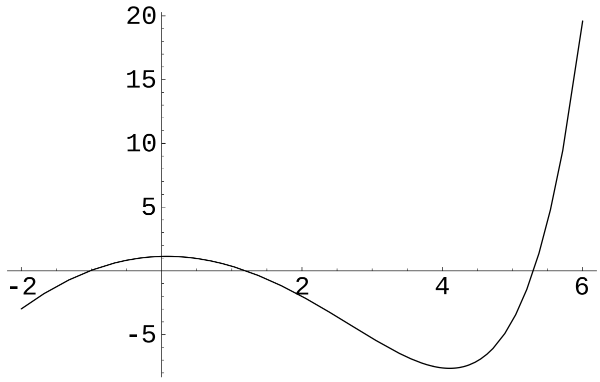
Esercizio 2 Posto $f(x) = e^{x-2} - x^2 + 1$, si ha

$$\lim_{x->-\infty} f(x) = -\infty, \quad f(0) = 1 + \mathrm{e}^{-2} > 0, \quad f(2) = -2, \quad \lim_{x->+\infty} f(x) = +\infty.$$

Quindi si può ipotizzare che vi siano tre soluzioni: $\alpha < 0$, $\beta \in (0, 2)$ e $\gamma > 2$.
Per vedere che non vi sono altre soluzioni si calcolano le derivate

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x-2} - 2x, \quad f''(x) = \mathrm{e}^{x-2} - 2.$$

La $f''(x)$ si annulla nel solo punto $d = 2 + \log 2 \sim 2.7$, quindi la $f'(x)$ si annulla in due punti $d_1 < d$ e $d_2 > d$. È evidente che $\alpha < d_1 < \beta$ e $\beta < d_2 < \gamma$. Poiché $f'(0) = \mathrm{e}^{-2} > 0$ è $d_1 > 0$. Inoltre $f''(2) = -1$, quindi $d > \beta$ (si veda il grafico di $f(x)$). Si ha convergenza ad α per $x_0 < d_1$, a β per $\beta < x_0 \leq d$, a γ per $x_0 > d_2$. Semplici ed efficaci scelte per x_0 possono essere nei tre casi $x_0 = -2$, da cui si ottiene una successione crescente ad α, $x_0 = 2$, da cui si ottiene una successione decrescente a β, e $x_0 = 6$, da cui si ottiene una successione decrescente a γ. L'ordine di convergenza è in ogni caso 2.



Esercizio 3 È

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di P è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{2} + 1.$$

Si verifica subito che questo polinomio ha la soluzione $\lambda = 1$. Quindi $\rho(P) \geq 1$, da cui si deduce che il metodo non è convergente (in effetti tutte e tre le soluzioni hanno modulo 1).

Esercizio 4 Si ha

$$p(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{8}{3}, \quad q(x) = -\frac{x^2}{60} + \frac{x}{4} - \frac{7}{30},$$

$$r(x) = f(x) - p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\,\frac{f'''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in (1,3),$$

$$s(x) = f(x) - q(x) = (x-4)(x-5)(x-6)\,\frac{f'''(\xi_2)}{6}, \quad \xi_2 \in (4,6),$$

$$f'''(x) = \frac{12}{x^4}, \quad \max_{x\in[1,3]} |f'''(x)| = 12, \quad \max_{x\in[4,6]} |f'''(x)| = \frac{3}{4^3}\,.$$

Per ogni terna di punti equidistanti x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ è

$$\begin{aligned} &\max_{x\in[x_0,x_2]} |\pi(x)| = \max_{x\in[x_0,x_2]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \\ &\leq \max_{x\in[x_0,x_1]} |(x-x_0)(x-x_1)| \cdot \max_{x\in[x_0,x_2]} |(x-x_2)| \leq \frac{h^2}{4} \cdot 2h = \frac{h^3}{2}\,. \end{aligned}$$

Nel nostro caso è $h = 1$ per entrambi gli intervalli, quindi

$$\max_{x\in[1,2]} |r(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{6} = 1, \quad \max_{x\in[4,6]} |s(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6\ 4^3} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256} < 0.004$$

Una maggiorazione più bassa si sarebbe potuta ottenere stimando più accuratamente il massimo di $|\pi(x)|$ che è di poco minore di 0.4 in entrambi gli intervalli.