Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 12/6/2009

Esercizio 1

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x \, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = -\frac{x^2 \sin x}{x \cos x - \sin x}.$$

Poiché $\lim_{x \to 0} c_x = 3$, c_x è limitato in un intorno di $x = 0$. Perciò l'errore inerente è limitato.
L'errore algoritmico è

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(4)} - \frac{\sin x}{f(x)} \epsilon^{(3)} + \frac{x \cos x}{f(x)} (\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)}),$$

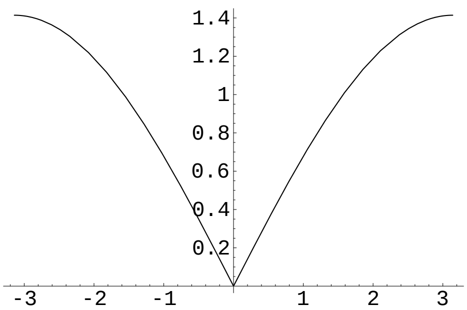
dove gli $\epsilon^{(i)}$ sono errori locali. Poichè

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{\sin x}{f(x)} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{x \cos x}{f(x)} \right| = \infty,$$

in un intorno dello zero l'algoritmo è instabile.

Esercizio 2

Il grafico di $f(x)$ per $k = 1/2$ è



Nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ l'equazione ha la sola soluzione $\alpha = 0$. È evidente che se $x_0 > 0$ risulta $x_1 < 0$. Si osservi che le due derivate

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos x}}, \quad f''(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 - \cos x}} - \frac{\sin^2 x}{4\sqrt{(1 - \cos x)^3}}$$

non sono continue in α e che e i teoremi sulla convergenza del metodo delle tangenti non sono applicabili neanche in intervalli della forma $[a, \alpha)$ o $(\alpha, b]$, perché in nessun punto di tali intervalli si ha $f(x) f''(x) > 0$.
Per studiare la convergenza si può procedere nel modo seguente. Per $x \neq \alpha$ il metodo delle tangenti definisce la successione

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = x - \frac{2(1 - \cos x)}{\sin x}.$$

Si ha

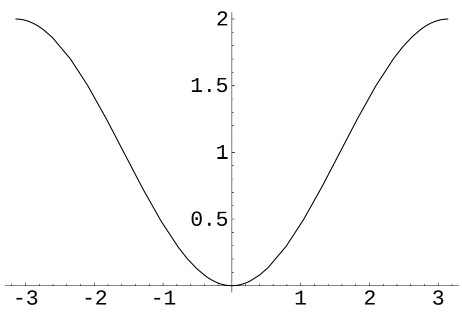
$$g'(x) = -1 + 2\,\frac{\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}.$$

Poiché $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$, $g'(x)$ risulta continua nell'intorno dello zero ponendo $g'(0) = 0$, e per il teorema del punto fisso si ha convergenza locale, con ordine almeno due.
Ancora più semplicemente usando la formula di Taylor si ha che in un intorno dello zero è

$$g(x) \sim -\frac{x^3}{12}.$$

Quindi risultano definite in modo continuo tutte le derivate di $g(x)$ nell'intorno dello zero, con $g'(0) = 0$ (come si è già visto), $g''(0) = 0$, e $g'''(0) = -1/2$. Quindi si ha convergenza locale di ordine esattamente 3.

Il grafico di $f(x)$ per $k = 1$ è



Nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ l'equazione ha la sola soluzione $\alpha = 0$. Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ è $f(x) > 0$, $f(x) \neq 0$ e $f''(x) > 0$. Quindi si ha convergenza ad α per ogni x_0 in tale intervallo. Per simmetria si ha convergenza ad α anche per ogni $x_0 \in (\pi/2, 0)$. L'ordine di convergenza è 1, in quanto la molteplicità di α è 2.

Per $k = 2$ la situazione è analoga a quella per $k = 1$, con la differenza che l'intervallo di convergenza è ora $(-2\pi/3, 2\pi/3)$. L'ordine di convergenza è 1, in quanto la molteplicità di α è 4.

Esercizio 3

Gli autovalori di A si trovano risolvendo l'equazione caratteristica

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

e sono

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La matrice B è triangolare superiore, quindi i suoi autovalori sono dati dai termini principali e sono $\mu_1 = \mu_2 = 1$. La matrice C è

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p_C(\gamma) = \det(C - \gamma I) = \det \begin{bmatrix} 1-\gamma & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Applicando la regola di Laplace si ha

$$p_C(\gamma) = \gamma^4 - 3\gamma^3 - \gamma^2 + 2\gamma + 1 = (\gamma^2 - \gamma - 1)^2.$$

Perciò gli autovalori di C sono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda_1\mu_1 = \lambda_1\mu_2 \quad \text{e} \quad \gamma_3 = \gamma_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \lambda_2\mu_1 = \lambda_2\mu_2.$$

Esercizio 4

$p(x)$ ha grado 5 e $q(x)$ grado minore o uguale a 3. Quindi $r(x)$ ha grado 5 e si annulla almeno nei quattro nodi x_i per $i = 0, \ldots, 3$. Perciò si può scrivere

$$r(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(bx + c),$$

dove b e c sono coefficienti opportuni. Svolgendo i prodotti si vede che il coefficiente di x^5 è b e che il coefficiente di x^4 è $c - b(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$. Perciò

$$b = a_5 \quad \text{e} \quad c = a_4 + a_5\,(x_0 + x_1 + x_2 + x_3).$$

Nel caso particolare è $b = 1$, $c = 6$, e quindi

$$r(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x+6), \quad r(-1) = 120.$$