Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 12/6/2012

Esercizio 1

Per k e β interi la frazione $x = k/(\beta - 1)$ è un numero razionale e i numeri razionali hanno rappresentazione periodica (eventualmente finita) qualunque sia la base in cui sono rappresentati. Nel caso particolare della frazione 3/7 si ha

in base 8: $3/7 = (0.\overline{3})_8$

in base 10: $3/7 = (0.\overline{428571})_{10}$

Esercizio 2

L'equazione può anche essere scritta come $\log x = -2x$. Le due funzioni $f_1(x) = \log x$ (crescente) e $f_2(x) = -2x$ (decrescente) si incontrano in un solo punto α, con $1/\mathrm{e} < \alpha < 1/2$. Infatti $f_1(1/\mathrm{e}) = -1 < f_2(1/\mathrm{e}) = -2/\mathrm{e} \sim -0.7$ e $f_1(1/2) \sim -0.7 > f_2(1/2) = -1$.

Posto $g(x) = -\log x/2$, per il primo metodo si ha $g'(\alpha) = -1/(2\alpha)$, quindi $|g'(\alpha)| > 1$. Perciò il punto α è repulsivo. Una semplice costruzione geometrica mostra che non vi può essere convergenza.

Posto $g(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, per il secondo metodo si ha $g'(\alpha) = -2/\mathrm{e}^{2\alpha}$, quindi $|g'(\alpha)| = 2/\mathrm{e}^{2\alpha} < 2/\mathrm{e}^{2/\mathrm{e}} \sim 2/2.087 < 1$. Perciò il punto α è attrattivo e il metodo è localmente convergente. Poiché $g(1/2) = 1/\mathrm{e}$ e $g((1/\mathrm{e}) < 1/2$, entrambi i punti possono essere usati come iniziali per ottenere una successione convergente. L'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 3

Si ha

$$M = A^T A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad N = AA^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & \sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di M sono 7 e 8, perciò il determinante di M è diverso da 0 e il primo sistema è risolubile. Gli autovalori di N sono 0, 7 e 8, perciò il determinante di N è uguale a 0 e il suo rango è 2. Quindi il secondo sistema non è risolubile perché il rango della matrice aumentata è 3. La soluzione che si ottiene dal primo sistema è $x_1 = (\sqrt{3} + 2)/7$ e $x_2 = (\sqrt{3} - 1)/8$ e non soddisfa il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Esercizio 4

È $p_1(x) = x$ e $p_2(x) = (3x + 1)/4$, per cui

$$\epsilon_1 = \max_{x\in[0,1]} |\sqrt{x} - x|, \qquad \epsilon_2 = \max_{x\in[0,1]} |\sqrt{x} - (3x + 1)/4|.$$

La funzione $\sqrt{x} - x$ è sempre ≥ 0 in $[0,1]$ e ha massimo in $1/4$. Quindi $\epsilon_1 = 1/4$. La funzione $\sqrt{x} - (3x+1)/4$ è negativa per $x < 1/9$ e positiva per $x > 1/9$. Nell'intervallo $[0, 1/9]$ cresce dal valore $-1/4$ assunto in 0 al valore 0 assunto in $1/9$. Nell'intervallo $[1/9, 1]$ si mantiene sempre minore di $1/4$. Quindi $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1/4$.