Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 12/9/2013

Esercizio 1

L'errore inerente risulta

$$\epsilon_{in} = \frac{xf'(x)}{f(x)}\,\epsilon_x = -\frac{\sqrt{3x}}{x-3}\,\epsilon_x,$$

quindi $f(x)$ è malcondizionata nell'intorno sinistro di 3 e bencondizionata nell'intorno di 0.

Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon_5 - \epsilon_4 + \epsilon_3 + \frac{2\sqrt{3x}}{x-3}\big(\epsilon_2 + \epsilon_1\big),$$

dove ϵ_1 e ϵ_2 sono gli errori locali di $\sqrt{x}$ e $\sqrt{3}$, ϵ_3 e ϵ_4 sono gli errori locali di $\sqrt{x}+\sqrt{3}$ e $\sqrt{x}-\sqrt{3}$ e ϵ_5 è l'errore locale della divisione. Quindi il primo algoritmo è instabile nell'intorno sinistro di 3.

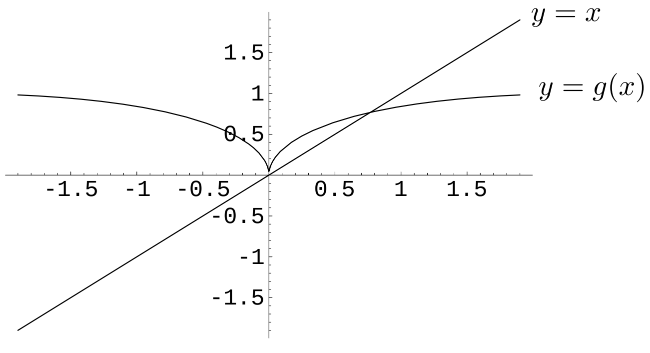
Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon_6 + \epsilon_5 - \epsilon_4 + \frac{2\sqrt{3x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2}(\epsilon_3 + \frac{1}{2}\epsilon_2) + \frac{x+3}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2}\,\epsilon_1,$$

dove ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_4 sono gli errori locali di $x+3$, $3x$ e $x-3$, ϵ_3 è l'errore locale di $2\sqrt{3x}$, ϵ_5 è l'errore locale di $x+3+2\sqrt{3x}$, e ϵ_6 è l'errore locale della divisione. Nell'intervallo assegnato è $|\epsilon_{alg}^{(2)}| < 5u$, quindi il secondo algoritmo è stabile.

Esercizio 2

(a) Poiché $g(-x) = g(x)$, la funzione è simmetrica rispetto all'origine. I grafici di $y = x$ e $y = g(x)$ sono



Oltre alla soluzione nulla α vi è un'altra soluzione β nell'intervallo $[\pi^2/16, 1]$. Infatti $\pi^2/16 \sim 0.617$, mentre $\sin\sqrt{\pi^2/16} = \sin\pi/4 = \sqrt{2}/2 \sim 0.7$.

(b) Per $x > 0$ è $g(x) = \sin\sqrt{x}$, quindi si può derivare $g(x)$ e la $g'(x)$ è positiva e decrescente. Per $x \to 0^+$ la $g'(x)$ tende a $+\infty$. Quindi il metodo non converge verso α, ma converge a β per ogni $x_0 > 0$.

Esercizio 3

(a) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\beta/\alpha & 0 \\ \beta/\alpha & 0 & -\beta/\alpha \\ 0 & \beta/\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

La terza riga è combinazione lineare della prima, quindi il determinante di J è zero e J ha un autovalore $\lambda_1 = 0$. Inoltre $\det(J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 2\beta^2/\alpha^2)$. Quindi gli altri due autovalori sono i numeri complessi $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}|\beta|/|\alpha|$. Perciò $\rho(J) = \sqrt{2}|\beta|/|\alpha|$. Il metodo di Jacobi è convergente per $\sqrt{2}|\beta| < |\alpha|$. La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ \beta/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ \beta^2/\alpha^3 & \beta/\alpha^2 & 1/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & \beta/\alpha & 0 \\ 0 & \beta^2/\alpha^2 & \beta/\alpha \\ 0 & \beta^3/\alpha^3 & \beta^2/\alpha^2 \end{bmatrix}$$

È $\det(G - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda + 2\beta^2/\alpha^2)$. Quindi G ha due autovalori nulli e il terzo uguale a $-2\beta^2/\alpha^2$ e risulta $\rho(G) = 2\beta^2/\alpha^2$. Anche il metodo di Gauss-Seidel è convergente per $\sqrt{2}|\beta| < |\alpha|$.

(b) Se $2\beta^2 = \alpha^2$ sia J che G hanno raggio spettrale uguale a 1, quindi entrambi i metodi non sono convergenti.

Esercizio 4

a) È

$$p_1(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{6})\, x + \frac{3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}, \qquad p_2(x) = -\sqrt{2}\, x + 1.$$

Indicata con $p(x) = a\,x + b$ una generica retta di interpolazione della funzione $f(x)$ nei nodi x_0 e x_1 appartenenti a $[0, 1]$, si ha

$$r(x) = f(x) - p(x) = 1 - \sqrt{x} - (a\,x + b)$$

e sia ξ un punto tale che $r'(\xi) = 0$. Nel nostro caso è

$$r'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - a, \implies \sqrt{\xi} = -\frac{1}{2a}$$

e

$$r(\xi) = 1 - \sqrt{\xi} - (a\xi + b) = 1 + \frac{1}{2a} - (a\frac{1}{4a^2} + b) = 1 + \frac{1}{4a} - b.$$

Quindi

$$\epsilon = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| = \max\{|r(0)|, |r(\xi)|, |r(1)|\}$$

$$= \max\{|1 - b|, |1 + \frac{1}{4a} - b|, |a + b|\}$$

Per $p_1(x)$ è $a = \sqrt{3} - \sqrt{6}$ e $b = \dfrac{3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$, quindi

$$\epsilon_1 = \max\Big\{\frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}, \frac{5\sqrt{6} - 7\sqrt{3}}{12}, \frac{2\sqrt{6} - 3 - \sqrt{3}}{3}\Big\} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3} \sim 0.338$$

Per $p_2(x)$ è $a = -\sqrt{2}$ e $b = 1$, quindi

$$\epsilon_2 = \max\{\frac{1}{4\sqrt{2}}, \sqrt{2} - 1\} = \sqrt{2} - 1 \sim 0.414$$

Quindi il primo polinomio approssima meglio.