Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 13/1/2014

Esercizio 1

L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{2-x}{x-1}.$$

Pertanto il calcolo di $f(x)$ è malcondizionato solo nell'intorno di 1.
Per l'algoritmo $f(x) = 1/x - 1/x^2$ si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(4)} + \frac{1}{xf(x)}\,\epsilon^{(1)} - \frac{1}{x^2 f(x)}\big(\epsilon^{(3)} - \epsilon^{(2)}\big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di $1/x$, x^2 e $1/x^2$, e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale della sottrazione finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\Big(1 + \frac{|x|+2}{|x-1|}\Big).$$

Quindi questo algoritmo non è stabile nell'intorno di 1.
Per l'algoritmo $f(x) = (x-1)/x^2$ si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \eta^{(1)} - \eta^{(2)} + \eta^{(3)},$$

dove $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di $x-1$, x^2 e della divisione finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

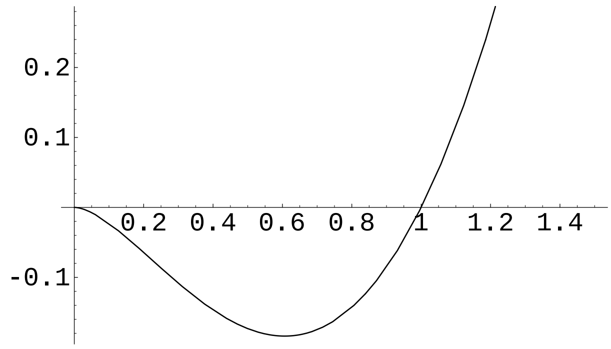
$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < 3u.$$

Quindi questo algoritmo è stabile per ogni $x \neq 0$. All'esterno dell'intervallo $(0,4)$ in cui è preferibile il secondo algoritmo, il primo è preferibile.

Esercizio 2

Dal grafico di $f(x)$ risulta che l'equazione $f(x) = 0$ ha, oltre alla soluzione nulla anche la soluzione $\alpha = 1$. Scegliendo $x_0 > 1$ il metodo delle tangenti genera una successione convergente ad α in maniera monotona. Poiché $f'(x) = x + 2x\log x$ si annulla nel punto $x_m = \mathrm{e}^{-1/2} \sim 0.6$, scegliendo $x_m < x_0 < 1$ il metodo dà $x_1 > 1$ e da questo punto si ha convergenza monotona. È $f'(\alpha) = 1$ e $f''(\alpha) \neq 0$, quindi l'ordine di convergenza è 2.

Per studiare la convergenza del metodo alla soluzione nulla, si nota che nell'intervallo $(0, x_m)$ è $f(x) < 0$ e la $f'(x)$ è continua, con $f'(x) < 0$. La $f''(x) = 3 + 2\log x$ si annulla per $x_f = \mathrm{e}^{-3/2} \sim 0.22$ e $f''(x) < 0$ per $0 < x < x_f$. Una retta tangente alla $f(x)$ in x_0 appartenente a tale intervallo interseca l'asse delle x in $0 < x_1 < x_0$. Ne segue la convergenza del metodo delle tangenti se si sceglie $0 < x_0 < x_f$. Il metodo però converge anche



per punti $x_0 > x_f$ purché risulti $x_1 > 0$. Per determinare dove ciò accade, risolviamo la disequazione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x(\log x + 1}{2\log x + 1} > 0.$$

Si ottiene che deve essere $\log x < -1$, cioè $x < \mathrm{e}^{-1} \sim 0.36$. Per un x_0 positivo e minore di tale valore il metodo delle tangenti risulta convergente a zero. Per determinare l'ordine di convergenza si calcola

$$g'(x) = \frac{\log x(3 + 3\log x)}{(2\log x + 1)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} g'(x) \neq 0.$$

Quindi l'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 3

(a) Non esistono valori di k tali che A abbia predominanza diagonale in senso stretto, per cui non si può dedurre direttamente la convergenza dei metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel.
(b) Per il metodo di Jacobi la matrice di iterazione è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -k/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

J ha due autovalori $\pm 1/\sqrt{2}$ reali per ogni k. Gli altri due sono $\pm\sqrt{k}/\sqrt{8}$ se $k > 0$ e $\pm \boldsymbol{i}\sqrt{|k|}/\sqrt{8}$ se $k < 0$, per cui $\rho(J) = \max\{1, \sqrt{|k|/2}\}/\sqrt{2}$. È $\rho(J) < 1$ per $|k| < 8$. Il minimo di $\rho(J)$ si ha quando $\sqrt{|k|/2} = 1$, cioè per $|k| = 4$.

Per il metodo di Gauss-Seidel la matrice di iterazione è

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -k/8 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & k/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono 0 di molteplicità 2, $1/2$ e $k/8$. Quindi $\rho(G) = \max\{4, |k|\}/8$. È $\rho(G) < 1$ per $|k| < 8$. Il minimo di $\rho(G)$ si ha quando $|k|/8 = 1/2$, cioè per $|k| = 4$. Quindi entrambi i metodi convergono per $|k| < 8$ e hanno la convergenza più rapida per $|k| = 4$. Però per tale valore di $|k|$ è $\rho(J) = 1/\sqrt{2}$ e $\rho(G) = 1/2$, quindi $\rho(J) > \rho(G)$. Ne segue che il metodo di Gauss-Seidel converge più rapidamente del metodo di Jacobi.

Esercizio 4

a) È $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1$, $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1/128$ e $f(x_2) = 1$. Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = \frac{x}{24}\,(31x - 7).$$

(b) $f(x)$ è derivabile tre volte con continuità. Quindi il resto è

$$r(x) = \pi(x)\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}, \quad \text{dove} \quad \pi(x) = x\big(x - \frac{1}{4}\big)\big(x-1\big), \quad \xi \in \big(0,1\big).$$

Si ha

$$f(x) = x^{7/2}, \quad f'(x) = (7/2)x^{5/2}, \quad f''(x) = (35/4)x^{3/2}, \quad f^{(3)}(x) = (105/8)x^{1/2}.$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} \Big|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\Big| \le \frac{35}{16}.$$

Per $x \in [0, 1/4]$ è $\max|\pi(x)| \le (1/4)^2$, per $x \in [1/4, 1]$ è $\max|\pi(x)| \le (1-1/4)^2$, quindi

$$|\pi(x)| \le \frac{9}{16} \quad \text{e} \quad |r(x)| \le \frac{315}{256} \sim 1.23$$

Una limitazione migliore per $|r(x)|$ si ottiene trovando il massimo di $|\pi(x)|$. Si ha infatti

$$\pi(x) = x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{x}{4}, \quad \pi'(x) = 3x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}.$$

È $\pi'(x) = 0$ per $s_1 = (5-\sqrt{13})/12$ e $s_2 = (5+\sqrt{13})/12$. Calcolando $\pi(s_1)$ e $\pi(s_2)$ si vede che $|\pi(s_1) < |\pi(s_2)|$ e $|\pi(s_2)| \sim 0.095$ e allora

$$|r(x)| \le 0.095\,\frac{35}{16} < 0.21.$$