Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 13/1/2016

Esercizio 1

(a) Il coefficiente di amplificazione è

$$c_x = \frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0_+} |c_x| = 2,$$

e nell'intervallo $(0, \pi/2)$ non ci sono altri punti per i quali il denominatore di c_x si annulla, abbiamo che il problema è ben condizionato per $x \to 0$. Il problema risulta ben condizionato anche per ogni altro valore nell'intervallo considerato perché $|c_x|$ è limitato.

(b) Per il primo algoritmo si ha:

$$\epsilon_{alg_1} = \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)} - \frac{\sin x}{x - \sin x}\,\epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ ed $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo del seno, della sottrazione e della divisione rispettivamente. Quindi

$$|\epsilon_{alg_1}| < u\Big(2 + \frac{|\sin x|}{|x - \sin x|}\Big)$$

che risulta illimitato in un intorno destro di 0. Pertanto il primo algoritmo è instabile nell'intorno destro di 0.

Per il secondo algoritmo si ha:

$$\epsilon_{alg_2} = \eta^{(3)} - \frac{\sin(x)}{x - \sin(x)}(\eta^{(2)} + \eta^{(1)}),$$

dove $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo del seno, della divisione e della sottrazione, rispettivamente. Quindi

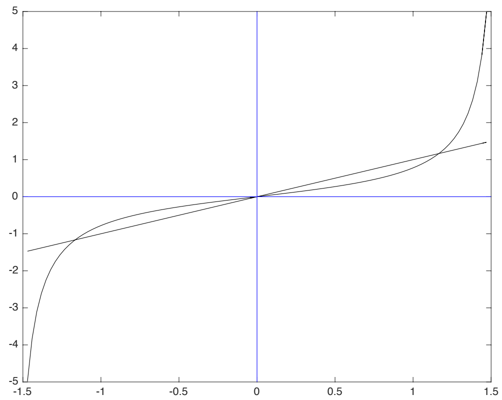
$$|\epsilon_{alg_2}| < u\Big(1 + 2\,\frac{|\sin(x)|}{|x - \sin x|}\Big).$$

Pertanto anche il secondo algoritmo è instabile per $x \to 0$.

Esercizio 2

(a) Attraverso la separazione grafica si osserva che l'equazione $f(x) = 0$ ha 1 soluzione $\alpha = 0$ per $k \leq 1$ e 3 soluzioni $-\beta, 0, \beta$ per $k > 1$. Il valore di β dipende da k.

(b) Si nota che $g'(x) = \frac{1}{k\ \cos^2(x)}$. Quindi $g'(0) = 1/k$. Per $k = 1/2$ abbiamo $g'(0) = 2$ e quindi non abbiamo convergenza locale all'unico punto fisso $\alpha = 0$.



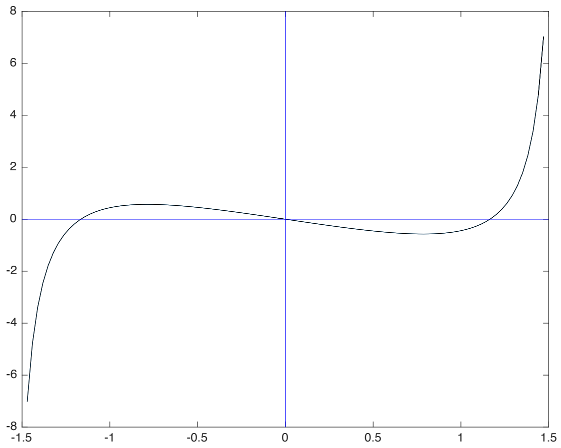
Per $k = 2$, abbiamo 3 punti fissi. Per $\alpha = 0$ abbiamo $g'(\alpha) = \frac{1}{2}$ e quindi convergenza locale a 0. Dal grafico si osserva che abbiamo convergenza monotona a 0 partendo da qualsiasi punto tra $(-\beta, \beta)$. L'ordine di convergenza è 1 poiché $g'(0) \neq 0$. Si noti che $\beta \in (\pi/4, \pi/2)$ e per ogni valore in questo intervallo $|g'(x)| > 1$ quindi non abbiamo convergenza locale sia a β che a $-\beta$.

(c) Vale che $f'(x) = 1/\cos^2(x) - k$ e $f''(x) = 2\sin(x)/\cos^2(x)$. Abbiamo quindi che per $k = 1/2$ sono soddisfatte le condizioni del teorema di convergenza in grande e quindi abbiamo convergenza monotona per ogni $x_0 \neq 0$. L'ordine è 3 poiché $f''(0) = 0$ e $f'''(0) \neq 0$.

Per $k = 2$ osservando il grafico, vediamo che le condizioni per la convergenza (monotona decrescente) a β sono soddisfatte per $x_0 > \beta$. In modo analogo abbiamo convergenza monotona crescente a $-\beta$ per $x_0 < -\beta$.

Poiché $f'(x)$ si annulla in $x_m = \pi/4$ e in $x_M = -\pi/4$, abbiamo convergenza a β per ogni $x_0 > x_m$ e a $-\beta$ per $x_0 < x_M$. l'ordine è 2.

Per quanto riguarda la convergenza a $\alpha = 0$, abbiamo convergenza locale in quando è soddisfatto il teorema del punto fisso applicato alla



funzione $x - f(x)/f'(x)$. Poiché la molteplicità della soluzione è 1 e $f''(0) = 0$ l'ordine è 3, infatti $f'''(0) \neq 0$.

Esercizio 3

La matrice $A = I - M$ risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di iterazione di Jacobi risulta $J = M$. Il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$. Tramite la sostituzione $t = \lambda^2$ otteniamo che le 4 radici risultano $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{(3+\sqrt{5})/2}$ e $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{(3-\sqrt{5})/2}$ non abbiamo quindi convergenza poiché $|\lambda_{1,2}| > 1$.

Esercizio 4

(a) Il polinomio di interpolazione è

$$p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x.$$

(b)Non è possibile applicare il teorema del resto perché esistono punti dell'intervallo $[x_0, x_2]$ in cui $f(x)$ non è derivabile. Occorre quindi analizzare la funzione $r(x) = |x| - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$. Analizzando separatamente il caso $x < 0$ e $x \geq 0$ otteniamo che $|r(x)| \leq \max\{2/3, 1/2\} = 2/3$.

(c) Poiché separatamente per $x < 0$ ed $x > 0$ $f(x)$ è un polinomio di primo grado, il polinomio di interpolazione su 2 nodi coinciderà con $f(x)$. Pertanto il resto sarà sempre zero.