Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 14/7/2014

Esercizio 1

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\, f'(x)}{f(x)} = -\,\frac{1}{2\big(\sqrt{x}-1\big)}.$$

La funzione c_x non è limitata nell'intorno di 1. Quindi il problema risulta mal condizionato per x vicino a 1.

L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon^{(1)}_{alg} = \epsilon^{(4)} - \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, \epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali della radice quadrata, della addizione, della sottrazione e della divisione. Maggiorando in modulo si ha

$$\big|\epsilon^{(1)}_{alg}\big| < 4u.$$

L'errore algoritmico per il secondo algoritmo è

$$\epsilon^{(2)}_{alg} = \epsilon^{(6)} - \epsilon^{(5)} + \Big(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\Big)\, \epsilon^{(1)},$$

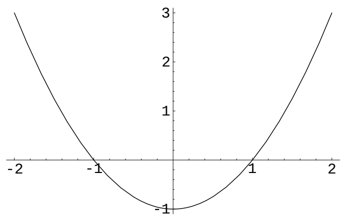
dove $\epsilon^{(5)}$ e $\epsilon^{(6)}$ sono gli errori locali della sottrazione e della divisione. Maggiorando in modulo si ha

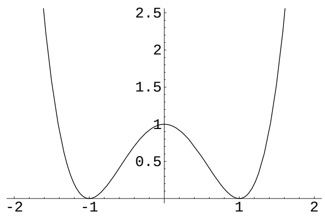
$$\big|\epsilon^{(2)}_{alg}\big| < u\Big(2 + \frac{1}{|\sqrt{x}-1|}\Big).$$

Il primo algoritmo è stabile per ogni x mentre il secondo non lo è nell'intorno di 1. Quindi il primo algoritmo è preferibile, anche se richiede una operazione in più.

Esercizio 2

I grafici di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono





Entrambe le equazioni hanno le soluzioni $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, ma con molteplicità 1 la prima equazione e con molteplicità 2 la seconda equazione. Questa diversa molteplicità ha come conseguenza che il metodo delle tangenti ha ordine 2 se applicato alla prima equazione e 1 se applicato alla seconda equazione. Per la scelta del punto iniziale non vi sono differenze sostanziali. Se $x_0 < 0$ si ha convergenza ad α, se $x_0 > 0$ si ha convergenza a β, come si può vedere graficamente. Per la seconda equazione vanno esclusi i punti $x_0 = \alpha$ e $x_0 = \beta$. È interessante esaminare le successioni che si ottengono per le due equazioni. Per la prima si ha

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_1(x_i}{f_1'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - 1}{2x_i} = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i},$$

per la seconda si ha

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_2(x_i}{f_2'(x_i)} = x_i - \frac{(x_i^2 - 1)^2}{4(x_i^2 - 1)x_i} = \frac{3x_i^2 + 1}{4x_i}.$$

Entrambe le successioni forniscono valori sempre > 0 se $x_0 > 0$ e sempre < 0 se $x_0 < 0$. Se però esaminiamo gli errori, ad esempio rispetto ad α, si ha per x_i vicino ad α

$$e_i^{(1)} = x_{i+1} - \alpha = \frac{x_i^2 + 1}{2x_i} + 1 = \frac{(x_i + 1)^2}{2x_i} \sim \frac{(x_i - \alpha)^2}{2\alpha},$$

$$e_i^{(2)} = x_{i+1} - \alpha = \frac{3x_i^2 + 1}{4x_i} + 1 = \frac{(3x_i + 1)(x_i + 1)}{4x_i} \sim \frac{2\alpha(x_i - \alpha)}{4\alpha} = \frac{x_i - \alpha}{2},$$

indicando appunto una convergenza del secondo ordine per la prima equazione e una convergenza del primo ordine per la seconda equazione.

Esercizio 3

$\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ hanno la stessa lunghezza n. Deve essere $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, quindi scelto $\boldsymbol{v}$ in modo che $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} \neq 0$ si ha

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}}.$$

Ad esempio si può scegliere $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$, per cui $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2$.

La matrice $A = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$ ha rango 1 e autovalori $\lambda_1 = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$ di molteplicità 1 e $\lambda_2 = 0$ di molteplicità $n - 1$. Infatti si ha

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u} = \lambda_1\,\boldsymbol{u},$$

indicando che $\boldsymbol{u}$ è l'autovettore relativo a λ_1, e

$$A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{z} = \lambda_2\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0},$$

per ogni vettore $\boldsymbol{z}$ ortogonale a $\boldsymbol{v}$. In $\mathbf{R}^n$ vi sono $n-1$ vettori linearmente indipendenti ortogonali a un dato $\boldsymbol{v}$, che sono quindi autovettori relativi a λ_2. Poichè

$$A = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix},$$

la matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = -\begin{bmatrix} 0 & v_2/v_1 & \cdots & v_n/v_1 \\ v_1/v_2 & 0 & \cdots & v_n/v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1/v_n & v_2/v_n & \cdots & 0 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} v_1/v_1 & v_2/v_1 & \cdots & v_n/v_1 \\ v_1/v_2 & v_2/v_2 & \cdots & v_n/v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1/v_n & v_2/v_n & \cdots & v_n/v_n \end{bmatrix}$$

$$= I - \boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T, \quad \text{dove} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1/v_1 \\ 1/v_2 \\ \vdots \\ 1/v_n \end{bmatrix}.$$

Quindi gli autovalori di $\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T$ sono $\mu_1 = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w} = n$ di molteplicità 1 e $\mu_2 = 0$ di molteplicità $n-1$ e gli autovalori di J sono $\nu_1 = 1 - \mu_1 = 1 - n$ di molteplicità 1 e $\nu_2 = 1 - \mu_2 = 1$ di molteplicità $n-1$. Ne segue che il metodo di Jacobi non è convergente.

Esercizio 4

Dato che il testo fornisce tre condizioni, ci si aspetta che il grado del polinomio cercato sia 2. Posto $p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$, si impongono le condizioni $p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$ e $p'(0) = f'(0)$. Si ottiene

$$p(x) = \big(f(1) - f(0) - f'(0)\big)\, x^2 + f'(0)\, x + f(0).$$

Se $f(1) - f(0) = f'(0)$ il grado del polinomio scende a 1. Se $f'(0) \neq 0$ non è comunque possibile ottenere un polinomio di grado 0. Nel caso particolare di $f(x) = \sin(\pi x)$ si ha $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(0) = \pi$, quindi

$$p(x) = \pi\, x\, (1 - x).$$

Il resto è

$$r(x) = f(x) - p(x) = \sin(\pi x) - \pi\, x\, (1 - x).$$

Per $x \in [0, 1]$ la funzione $r(x)$ è non negativa e ha il massimo in $x = 1/2$. Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} |r(x)| = \max_{x\in[0,1]} r(x) = r(1/2) = 1 - \pi/4 \sim 0.21.$$