Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 14/2/2011 (Compito A)

Esercizio 1

Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x \cos(x+\pi/4)}{\sin(x+\pi/4)}.$$

Il denominatore di c_x si annulla per $x = 3\pi/4$. Poiché

$$\lim_{x\to 3\pi/4} |c_x| = \infty,$$

il problema del calcolo di $f(x)$ è mal condizionato per x nell'intorno sinistro di $3\pi/4$. Per l'errore algorimico del primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(2)} + \frac{(x+\pi/4)\cos(x+\pi/4)}{\sin(x+\pi/4)}\, \epsilon^{(1)}.$$

Quindi il primo algoritmo è instabile per gli stessi x per cui il problema è mal condizionato. Per l'errore algorimico del secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \eta^{(5)} + \eta^{(4)} + \eta^{(3)} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, \eta^{(1)} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, \eta^{(2)},$$

dove $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo di $\sin x$ e $\cos x$, $\eta^{(3)}$ è l'errore locale della loro somma, $\eta^{(4)}$ è l'errore di rappresentazione di $1/\sqrt{2}$ e $\eta^{(5)}$ è l'errore locale del prodotto. Maggiorando in modulo, nell'ipotesi che $|\eta^{(1)}|, |\eta^{(2)}| < u$, si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < \left(3 + \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|\sin x + \cos x|}\right) u = \left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|\sin(x+\pi/4)|}\right) u.$$

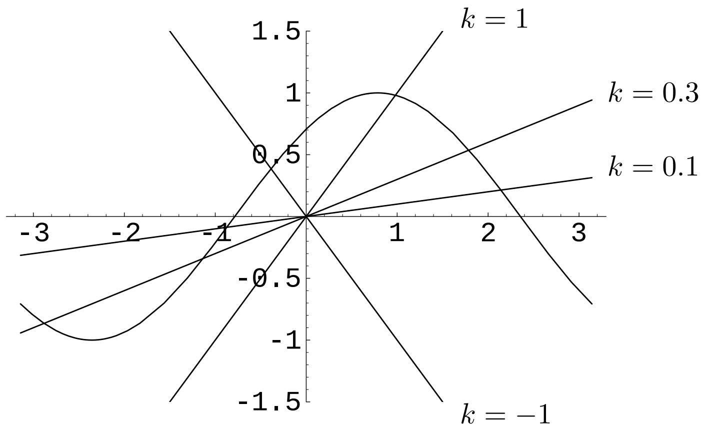
Quindi anche il secondo algoritmo è instabile nell'intorno di $3\pi/4$. Il primo algoritmo è preferibile sia dal punto di vista della stabilità che della complessità computazionale.

Esercizio 2

Per determinare il numero delle soluzioni reali conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$kx = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

La figura mostra il grafico della funzione $y = \sin(x + \pi/4)$ e il grafico delle rette $y = kx$ per i valori di $k = -1, 0.1, 0.3, 1$.



È evidente che al variare di k vi possono essere 1 o 2, o 3 soluzioni reali. In dettaglio (questa casistica non era espressamente richiesta dal testo, ma è comunque istruttiva)

(a) per $k < k'$ vi è una sola soluzione negativa di molteplicità 1,

(b) per $k' \leq k < 0$ vi è una soluzione negativa e una positiva entrambe di molteplicità 1,

(c) per $0 < k < k''$ vi è una sola soluzione positiva di molteplicità 1,

(d) per $k = k''$ vi è una soluzione positiva di molteplicità 1 e una soluzione negativa di molteplicità 2,

(e) per $k'' < k \leq k'''$ vi è una soluzione positiva e due soluzioni negative tutte di molteplicità 1,

(f) per $k''' < k$ vi è una soluzione positiva e una soluzione negativa tutte di molteplicità 1,

dove

k' è il valore di k per cui la retta nel punto π vale $\sin(\pi + \pi/4) = -1/\sqrt{2}$, quindi $k' = -1/(\pi\sqrt{2}) \sim -0.22$.

k'' è il valore di k per cui la retta nel punto $-\pi$ vale $\sin(-\pi + \pi/4) = 1/\sqrt{2}$, quindi $k'' = 1/(\pi\sqrt{2}) \sim 0.22$.

k''' è il valore di k per cui la retta è tangente alla sinusoide, quindi k''' soddisfa il sistema

$$k'''x = \sin(x + \pi/4), \qquad k''' = \cos(x + \pi/4).$$

Dal grafico si deduce che $k''' \sim 0.4$.

Per $k = 1$ l'equazione $x = g(x)$ ha la sola soluzione $0 < \alpha < 1$. In tale intervallo è

$$g'(x) = \cos(x + \pi/4), \quad |g'(x)| \leq \max_{0<x<1} |\cos(x + \pi/4)| < 1.$$

Quindi il metodo è convergente se si sceglie l'estremo più vicino alla soluzione, cioè $x_0 = 1$.

Per $k = -1$ l'equazione $x = g(x)$ ha la sola soluzione $-\pi/4 < \alpha < 0$. In tale intervallo è

$$g'(x) = -\cos(x + \pi/4) < 0, \quad |g'(x)| < 1.$$

Per applicare il teorema del punto fisso è quindi necessario restringere l'intervallo. Si verifica che $-\sin(-1/2 + \pi/4) > -1/2$, cioè $-1/2 < \alpha < 0$. In tale intervallo $|g'(x)| < |g'(-1/2)| < 1$. Quindi il metodo è convergente se si sceglie l'estremo più vicino alla soluzione, cioè $x_0 = -1/2$.

Sia per $k = 1$ che per $k = -1$ l'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 3

Dei cerchi di Gershgorin per riga, quello relativo alla seconda riga e quello relativo alla terza riga sono disgiunti sia fra di loro che dall'unione degli altri due cerchi, e contengono ciascuno un autovalore. Quindi si ha $-6 \le \lambda_1 \le -2$ e $-1 \le \lambda_2 \le 1$. Dei cerchi per colonna, quello relativo alla quarta colonna è disgiunto dall'unione degli altri cerchi e contiene un solo autovalore reale $10 \le \lambda_4 \le 14$. Ne segue che gli autovalori di A sono tutti reali e distinti, quindi A è diagonalizzabile. Sicuramente λ_1 è negativo e λ_3 e λ_4 sono positivi. Non si è in grado di dire, sfruttando solo i cerchi di Gershgorin di A, come sia λ_2 e quindi se A sia invertibile.

È

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per la regola di Laplace i determinanti di A e di B coincidono. B ha predominanza diagonale in senso stretto, quindi è invertibile. Ne segue che anche A lo è. Gli autovalori di A^{-1} sono tutti distinti, quindi anche A^{-1} è diagonalizzabile. Dalle limitazioni date sopra risulta che $10 \le \rho(A) \le 14$ e $\rho(A^{-1}) \ge 1/|\lambda_2| \ge 1$, mentre non si può dare una limitazione superiore a $\rho(A^{-1})$ con le sole informazioni che si sono trovate. Si potrebbe dare una limitazione superiore a $\rho(A^{-1})$ calcolando esplicitamente il determinante di B.

Esercizio 4

Non esistono valori reali del parametro k per cui la matrice A abbia predominanza diagonale in senso stretto, non si può pertanto dedurne la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel. La matrice di iterazione di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1/k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/k & 0 \end{bmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$p_J(\lambda) = \lambda^4 - \frac{2\lambda}{k} + \frac{1}{k^2} = \left(\lambda^2 - \frac{1}{k}\right)^2.$$

Quindi gli autovalori di J sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

e $\rho(J) = 1/\sqrt{|k|}$. Il metodo converge per $|k| > 1$. La matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ -1/k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k & 1/k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$p_G(\lambda) = \lambda^4 - \frac{2\lambda^3}{k} + \frac{\lambda^2}{k^2} = \lambda^2 \left(\lambda - \frac{1}{k}\right)^2.$$

Quindi gli autovalori di G sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad -\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{k},$$

e $\rho(G) = 1/|k|$. Il metodo converge per $|k| > 1$. Non esistono valori di k per cui un metodo è convergente e l'altro no. Per $|k| > 1$ entrambi i metodi convergono e $\rho(J) = \sqrt{\rho(G)} > \rho(G)$, quindi il metodo di Gauss-Seidel è preferibile.

Esercizio 5

È $\boldsymbol{x} = (-2, -1, 0, 1, 2)$ e $f(\boldsymbol{x}) = (0, 1/\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}, 0)$. Si può procedere in due modi: o calcolando i coefficienti del polinomio di interpolazione

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

che soddisfano il sistema

$$\begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalla terza riga si ha che $a_0 = 1$. Sottraendo la prima riga dalla quinta e la seconda riga dalla quarta risulta che $a_1 = 0$ e $a_3 = 0$. Resta

$$16a_4 + 4a_2 = -1, \quad a_4 + a_2 = 1/\sqrt{2} - 1,$$

da cui si ricava che $a_2 = -(15 - 8\sqrt{2})/12$ e $a_4 = (3 - 2\sqrt{2})/12$. Quindi

$$p(x) = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{12}\, x^4 - \frac{15 - 8\sqrt{2}}{12}\, x^2 + 1.$$

Oppure utilizzando il polinomio di Lagrange

$$p(x) = L_2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(L_1(x) + L_3(x)\big) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{4} - \frac{x^2(x^2-4)}{3\sqrt{2}}$$

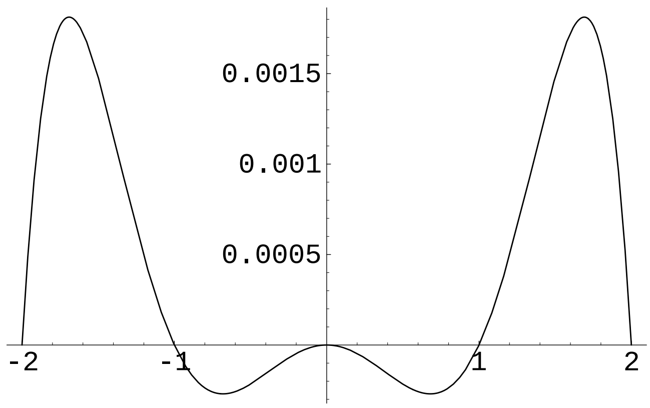
$$= (x^2 - 4)\left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{12}\, x^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Ovviamente i due polinomi trovati coincidono.

Il resto

$$r(x) = f(x) - p(x) = x(x^2-1)(x^2-4)\,\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}, \text{ dove } f^{(5)}(x) = \frac{\pi^5}{4^5} \cos\frac{\pi(2+x)}{4}$$

si annulla nei nodi ed è una funzione pari (perché sia $f(x)$ che $p(x)$ lo sono). Quindi il suo grafico ha la forma



e si ha

$$|r(x)| \le \frac{\pi^5}{4^5\, 5!} \max_{-2 \le x \le 2} |x|\,|x^2-1|\,|x^2-4|.$$

Il massimo viene assunto nel primo e nell'ultimo intervallo, quindi

$$\max_{-2 \le x \le 2} |x|\,|x^2-1|\,|x^2-4| = \max_{1 \le x \le 2} |x|\,|x^2-1|\,|x^2-4|$$

$$\le \max_{1 \le x \le 2} |x| \max_{1 \le x \le 2} |x^2-1| \max_{1 \le x \le 2} |x^2-4| = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18,$$

e

$$|r(x)| \le \frac{18\,\pi^5}{4^5\, 5!} = \frac{3\,\pi^5}{20480} \sim 0.045$$

Compito B

Lo svolgimento è sostanzialmente uguale a quello del compito A.

Per l'esercizio 2 si noti che $\cos(x + \pi/4) = \sin(-x + \pi/4)$, quindi tutte le considerazioni fatte per l'esercizio 2 del compito A valgono anche ora, purché si cambino opportunamente i segni.

Per l'esercizio 5 si ha

$$p(x) = \frac{-1+\sqrt{2}}{6}\,x^3 + (1-\sqrt{2})x^2 - \frac{11-8\sqrt{2}}{6}\,x + 1 = \frac{-1+\sqrt{2}}{6}\,(x-2)^3 + \frac{1-4\sqrt{2}}{6}(x-2).$$

Il grafico di $r(x)$ è antisimmetrico rispetto al punto $x = 2$ e risulta $|r(x)| \leq \pi^5/5120 \sim 0.06$.