Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 15/6/2011

Esercizio 1

L'errore inerente risulta

$$\epsilon_{in} = \frac{x f'(x)}{f(x)}\, \epsilon_x = -\, \frac{n\, x}{1-x}\, \epsilon_x.$$

In modulo è $|\epsilon_{in}| < n/(n-1)\, u$. Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è ben condizionato. Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = (n-1)\, \epsilon_1 + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i,$$

dove ϵ_1 è l'errore da cui è affetto $1-x$ e ϵ_i per $i > 1$ è l'errore locale dell'i-esimo prodotto. Se $|\epsilon_i| < u$ per ogni i, allora $|\epsilon_{alg}^{(1)}| < (2n-1)\, u$ e il primo algorimo risulta stabile in tutto l'intervallo.
Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon_2 - \frac{nx}{1-nx}\, \epsilon_1,$$

dove ϵ_1 e ϵ_2 sono gli errori locali del prodotto e della somma rispettivamente. Quindi $|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u/(1-nx)$, per cui il secondo algoritmo non risulta limitato nell'intorno sinistro di $1/n$.
Per confrontare gli errori dei due algoritmi bisogna però tenere conto anche dell'errore analitico del secondo. Dalla formula di Taylor si ha che

$$f(x) - (1-nx) = \frac{n(n-1)}{2}\, x^2 (1-\xi)^{n-2}, \quad 0 < \xi < x.$$

$$\epsilon_{an} = \frac{f(x) - (1-nx)}{(1-x)^n} = \frac{n(n-1)}{2(1-x)^n}\, x^2 (1-\xi)^{n-2},$$

per cui

$$|\epsilon_{an}| \le \frac{n(n-1)}{2(1-1/n)^n}\, \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2(1-1/n)^{n-1}}.$$

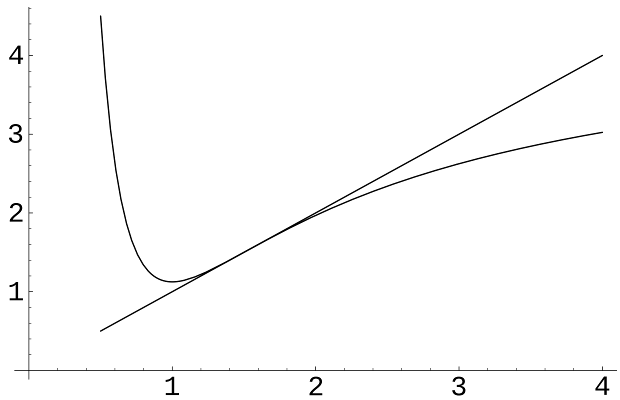
Quindi il secondo algoritmo è preferibile nell'intorno dello zero, altrimenti è preferibile il primo.

Esercizio 2

(a) Per trovare quante sono le soluzioni reali si trasforma l'equazione $x = g(x)$ nella forma $f(x) = 0$ e si ottiene

$$f(x) = \frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2} = \frac{(2x-3)^3}{8x^2}.$$

Il denominatore non si annulla per $x > 0$, quindi le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole quelle di $(2x-3)^3 = 0$. Perciò l'equazione data ha la sola soluzione $\alpha = 3/2$ di molteplicità 3.
(b) Nel disegnare il grafico si tiene conto che nel punto α la $y = g(x)$ ha la stessa derivata prima e seconda della $y = x$, cioè che $g'(\alpha) = 1$ e $g''(\alpha) = 0$, per cui α è un punto di flesso.



(c) È $g'(x) = 27(x-1)/(4x^3)$ e $0 < g'(x) < 1$ per $x > 1$, escluso il punto $x = \alpha$. Quindi vi è convergenza ad α per ogni scelta di $x_0 > 1$ e la convergenza è sublineare.
(d) Dal grafico di nota che se si sceglie un punto $x_0 \in (0, 1]$ si ottiene $x_1 > 1$. Quindi si ricade nel caso esaminato sopra e vi è convergenza.

Esercizio 3

Il polinomio caratteristico di P è

$$p(\lambda) = \det\big(P - \lambda I\big) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 - k = \big(\lambda - 1\big)^4 - k.$$

Quindi gli autovalori di P sono le quattro soluzioni dell'equazione $\big(\lambda-1\big)^4 = k$. Ponendo $x = \lambda - 1$, l'equazione $x^4 = k$ con $k > 0$ ha le due soluzioni reali $x_1 = \sqrt[4]{k}$ e $x_2 = -\sqrt[4]{k}$ e le due soluzioni complesse $x_3 = \boldsymbol{i}\,\sqrt[4]{k}$ e $x_4 = -\boldsymbol{i}\,\sqrt[4]{k}$. Corrispondentemente si ha $\lambda_1 = 1 + \sqrt[4]{k}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt[4]{k}$, $\lambda_3 = 1 + \boldsymbol{i}\,\sqrt[4]{k}$, $\lambda_4 = 1 - \boldsymbol{i}\,\sqrt[4]{k}$. Il massimo modulo è $\rho = 1 + \sqrt[4]{k} > 1$, quindi il metodo non è convergente per nessun valore di k.
(Domanda facoltativa) Il fatto che il metodo non sia convergente non esclude che per qualche vettore iniziale $\boldsymbol{x}^{(0)}$ si possa avere una successione convergente. Infatti per $k = 1/2$ è $|\lambda_4| = 1 - 1/\sqrt[4]{2} \sim 0.16 < 1$. Se indichiamo con $\boldsymbol{v}$ l'autovettore corrispondente, si ha $P\boldsymbol{v} = \lambda_4\boldsymbol{v}$ e quindi scegliendo $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{v}$ si ha

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = P\boldsymbol{x}^{(0)} = \lambda_4\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = P\boldsymbol{x}^{(1)} = \lambda_4^2\boldsymbol{v},$$

e così via, per cui $\boldsymbol{x}^{(k)} = \lambda_4^k\boldsymbol{v}$, che tende a zero per $k \to \infty$.

Esercizio 4

L'integrale dovrebbe essere approssimato in modo che il resto risulti in modulo minore di $\log 2\ 10^{-4} \sim 0.693\ 10^{-4}$. Nel nostro caso il resto della formula dei trapezi è dato da

$$R = -\frac{0.9^3}{12N^2}\, f''(\xi), \quad \text{con} \quad \xi \in (0.1, 1).$$

Poiché $\max_{y\in[0.1,1]} |f''(y)| = 2/0.1^3$ basta che sia $243/(2N^2) \leq 0.693\ 10^{-4}$. Il minimo valore di N per cui ciò si verifica è $N = 1325$.