Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 16/2/2016

Esercizio 1

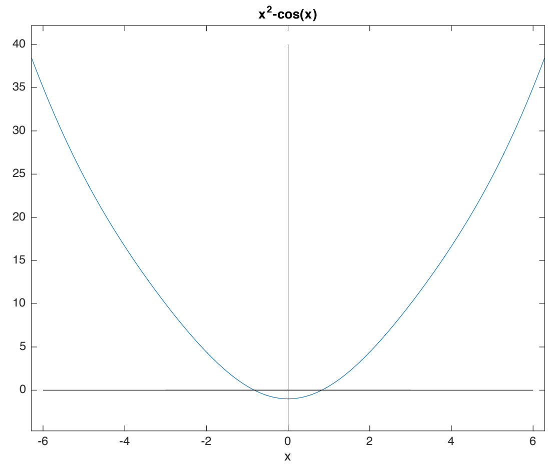
(a) Si osserva che in $\mathcal{F}(2,3,5,4)$ $1 = 2^1(0.100)_2$ e $5 = 2^3(0.101)_2$. Nell'intervallo considerato ci sono 10 umeri di macchina: 4 possibili mantisse con esponente 1, 4 possibili mantisse con esponente 2, 2 sole mantisse con esponete 3.

(b) Il numero 11 non è rappresentabile in $\mathcal{F}$. Infatti $11 = 2^4(0.1011)_2$ non è rappresentabile con 3 cifre. Quindi il numero più piccolo rappresentabile nell'intervallo è $12 = 2^4(0.110)_2$. Si rappresenta anche $14 = 2^4(0.111)_2$, mentre il numero 15 non è rappresentabile con 3 cifre. Quindi nell'intervallo ci sono solo 2 numeri di macchina, $2^4(0.110)_2$ e $2^4(0.111)_2$. Si noti che nonostante gli intervalli $[1,5]$ e $[11,15]$ abbiano la stessa ampiezza, i numeri di macchina non sono uniformemente di/-stri/-buiti e quindi nel secondo intervallo ci sono solo 2 numeri di macchina mentre nel primo 10.

Esercizio 2

(a) Attraverso la separazione grafica si osserva che l'equazione $f(x) = 0$ ha 2 soluzioni reali $\alpha, -\alpha$ con $\alpha \in [\pi/4, 1]$.

(b) Il grafico di $f(x)$ ottenuto osservando che $f'(x) = 2x + \sin(x)$ si annulla in $x = 0$ che è punto di minimo; che $f''(x) > 0$, per ogni x, risulta



Per il teorema di convergenza in largo, partendo da qualunque $x_0 > \alpha$ abbiamo una successione monotona convergente ad α. Per $x_0 < -\alpha$ si ottiene una successione monotona crecente convergente a $-\alpha$. Si nota che per $x_0 > 0$ abbiamo convergenza ad α e per $x_0 < 0$ abbiamo convergenza a $-\alpha$. L'ordine è 2.

(c) Per studiare il comportamento del metodo del punto fisso è sufficiente studiare il comportamento di $g'(x) = \frac{cos(x)}{x}$ nei punti fissi α e $-\alpha$. Poiché $g(x)$ è simmetrica è sufficiente studiare la funzione nel semipiano positivo. Abbiamo $g'(x) = -\frac{x\ \sin(x)+cos(x)}{x^2}$. Si nota inoltre che $|g'(\alpha)| = \left|1 + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right| > 1$. Quindi non abbiamo convergenza locale.

Esercizio 3

(a) Il metodo di Gauss è applicabile senza scambi di righe se il $det(A_i) \neq 0$ con A_i minori principali di testa di A di ordine 1 e 2. Abbiamo che $\det(A_1) = 1, \det(A_2) = 1 - \alpha\beta$, da cui otteniamo che se $\alpha\beta \neq 1$ il metodo di Gauss è applicabile senza scambi di righe. Applicando il metodo di Gauss ad A (supponendo che siano soddisfatte le condizioni sufficienti per la convergenza)

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha\beta & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & \frac{1-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \end{bmatrix}.$$

e $\det(A) = \det(A^{(2)} = 1(1-\alpha\beta)(\frac{1-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta}) = 1 - 2\alpha\beta$.

(b) La matrice di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\det(J - \lambda I) = \lambda(\lambda^2 - 2\alpha\beta)$, quindi il raggio spettrale della matrice di iterazione di Jacobi risulta $|\lambda| = \sqrt{2|\alpha||\beta|}$ e $|\lambda| < 1$ se e solo se $|\alpha\beta| < 1/2$.

La matrice di iterazione di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha\beta & \alpha\beta \\ 0 & \alpha\beta & \alpha\beta \end{bmatrix}.$$

G ha un autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e un autovalore $\lambda = 2\alpha\beta$. Quindi abbiamo convergenza se e solo se $\rho(G) = 2|\alpha\beta| < 1$ che ci formisce la stessa condizione per la convergenza del metodo di Jacobi $|\alpha\beta| < 1/2$. Sotto queste ipotesi, il metodo di Gauss-Seidel risulta convergere più velocemente in quanto $\rho(G) < \rho(J)$.

Esercizio 4

(a) I polinomi di interpolazione risultano

$$p_1(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \qquad p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} - 1.$$

(b) Si nota che $g(x) = f_1(x)*f_2(x) = 1$, cioè è la funzione costante 1, mentre $p_1(x) * p_2(x)$ è un polinomio di grado 4 che quindi non è il polinomio di interpolazione per $g(x)$, nonostante $g(x_i) = 1$ per $i = 0, 1, 2$.