Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 16/12/2009

Esercizio 1

(a) Dai cerchi di Gerschgorin per righe di A risulta che vi è un autovalore λ_3 reale tale che $5/2 \leq \lambda_3 \leq 13/2$. Considerando anche i cerchi per colonne si vede che gli altri due autovalori verificano $-4 \leq \mathcal{R}e(\lambda_1) \leq \mathcal{R}e(\lambda_2) \leq 0$.

(b) Dai cerchi di Gerschgorin per righe di

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & -3 & 1/2 \\ -9/2 & 3/2 & 9/2 \end{bmatrix}$$

risulta che vi è un autovalore μ_1 reale tale che $-4 \leq \mu_1 \leq -2$. Considerando anche i cerchi per colonne si vede che gli altri due autovalori verificano $-5/3 \leq \mathcal{R}e(\mu_2) \leq \mathcal{R}e(\mu_3) \leq 31/6$.

(c) A e B sono matrici simili, quindi hanno gli stessi autovalori $\lambda_i = \mu_i$ per $i = 1, 2, 3$. Quindi $\lambda_1 = \mu_1$ è reale. Ne segue che anche λ_2 è reale. Intersecando gli intervalli di separazione si ha

$$-4 \leq \lambda_1 \leq -2, \quad -\frac{5}{3} \leq \lambda_2 \leq 0, \quad \frac{5}{2} \leq \lambda_3 \leq \frac{31}{6}.$$

Esercizio 2

(a) Applicando la regola di Laplace ad esempio per $n = 6$ si ha

$$p_6(\lambda) = \det(Q_6 - \lambda\, I_6) = \det \begin{bmatrix} k-\lambda & & k \\ & Q_4 - \lambda\, I_4 & \\ k & & k-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (k-\lambda) \det \begin{bmatrix} Q_4 - \lambda\, I_4 & \\ & k-\lambda \end{bmatrix} - k \det \begin{bmatrix} & k \\ Q_4 - \lambda\, I_4 & \end{bmatrix}$$

$$= (k-\lambda)^2 \det(Q_4 - \lambda\, I_4) - k^2 \det(Q_4 - \lambda\, I_4) = \big((k-\lambda)^2 - k^2\big) p_4(\lambda).$$

In generale

$$p_n(\lambda) = \big((k-\lambda)^2 - k^2\big) p_{n-2}(\lambda).$$

(b) È

$$p_2(\lambda) = (k-\lambda)^2 - k^2,$$

$$p_n(\lambda) = \big((k-\lambda)^2 - k^2\big) p_{n-2}(\lambda) = \big((k-\lambda)^2 - k^2\big)^2 p_{n-4}(\lambda) = \ldots = \big((k-\lambda)^2 - k^2\big)^{n/2}.$$

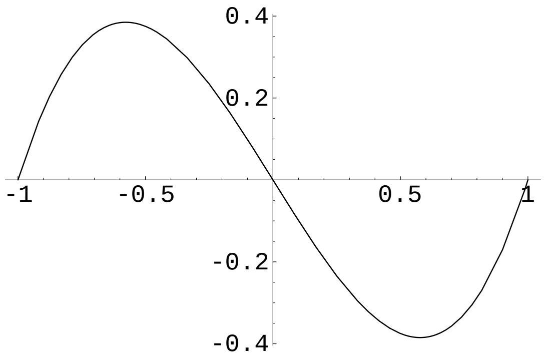
(c) Gli autovalori di Q_n soddisfano la relazione $(k-\lambda)^2 = k^2$, quindi sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2k$, ciascuno con molteplicità $n/2$, e si ha $\rho(A) = 2\,|k|$.

(d) Un metodo iterativo avente Q_n come matrice di iterazione converge se e solo se $|k| < 1/2$.

Esercizio 3

a) I punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$ sono allineati. Quindi il polinomio di interpolazione è di primo grado, ed esattamente $p(x) = x - 2$.

b) $r(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Il suo grafico è



c) $r'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ per $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi

$$\max_{x\in[-1,1]} |r(x)| = r\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = -r\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$