Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 17 Gennaio 2008

Esercizio 1

(a) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x-1}.$$

Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è malcondizionato nell'intorno di 1.

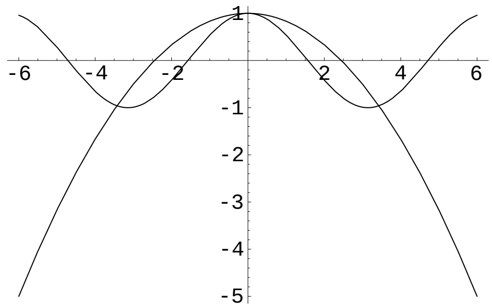
(b) Per il primo algoritmo si ha $|\epsilon_{alg}^{(1)}| < 3u$, dove u è la precisione di macchina. Per il secondo algoritmo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\Big(1 + \Big|\frac{2x(x-2)}{x(x-2)+1}\Big|\Big).$$

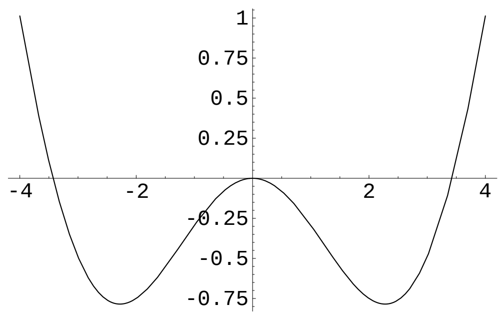
Il primo algoritmo è stabile per ogni x, mentre il secondo non lo è nell'intorno di 1. Quindi in generale il primo algoritmo è preferibile. Comunque al di fuori dell'intervallo circolare di centro 1 e raggio 1 le due maggiorazioni sono dello stesso ordine di grandezza e i due algoritmi sono equivalenti dal punto di vista della stabilità.

Esercizio 2

Si disegnano i grafici delle due funzioni $y = \cos x$ e $y = 1 - x^2/6$



Per $x = 0$ entrambe le funzioni valgono 1 e hanno derivata nulla. Quindi $\alpha = 0$ è soluzione di molteplicità 2 per l'equazione $f(x) = 0$. Inoltre per $x = \pi$ la prima funzione vale -1 e la seconda vale $1 - \pi^2/6 \sim -0.64$, mentre per $x = 4$ la prima funzione vale ~ -0.65 e la seconda vale $1 - 4^2/6 \sim -1.67$. Quindi vi è una soluzione $\beta \in (\pi, 4)$ di molteplicità 1. Per simmetria l'equazione ha anche la soluzione $\gamma = -\beta$. Si disegna il grafico della funzione $f(x)$



Oltre al punto $x = 0$ vi sono solo altri due punti di annullamento della $f'(x)$, che sono di minimo. Invece la $f''(x)$ si annulla infinite volte, quindi vi sono infiniti punti di flesso. In particolare nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ si considerano i punti

$$-2\pi < -\delta_3 < -\delta_2 < -\delta_1 < 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < 2\pi,$$

dove $\delta_2 \sim 2.28$ è punto di minimo, $\delta_1 \sim 1.23$ e $\delta_3 \sim 5.5$ sono punti di flesso. Perciò il metodo delle tangenti converge in modo monotono alla soluzione α con ordine di convergenza 1 per ogni punto iniziale $x_0 \in (-\delta_1, \delta_1)$. Per quanto riguarda la soluzione β, vi è convergenza in modo monotono con ordine di convergenza 2 per ogni punto iniziale $x_0 \in (\beta, \delta_3)$. Per un $x_0 \in (\delta_1, \delta_2)$ il metodo delle tangenti converge sicuramente, ma non è possibile stabilire a priori a quale soluzione (è probabile che converga ad α per i punti più a sinistra e a γ per i punti più a destra). Per un $x_0 \in (\delta_2, \beta)$ il metodo delle tangenti converge comunque a β, ma dimostrarlo formalmente è piuttosto complicato, per via della presenza di tanti punti di flesso. La situazione è speculare per la convergenza alla soluzione γ.

Esercizio 3

Le matrici di iterazione dei tre metodi proposti sono

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & -1 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha - 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di J e di $M^{-1}N$ è

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \alpha^2)$$

per cui $\rho(J) = \rho(M^{-1}N) = |\alpha|$, mentre $\rho(G) = \alpha^2$. Quindi i tre metodi convergono per $|\alpha| < 1$, e quello di Gauss-Seidel converge più rapidamente, in quanto $\rho(G) < \rho(J) = \rho(M^{-1}N)$.

Esercizio 4

(a) È $p_1(x) = 0$, quindi $r_1(x) = f(x)$.

(b) È $p_2(x) = -\dfrac{x}{4}$, quindi $r_2(x) = f(x) + \dfrac{x}{4} = x^3 - \dfrac{3x}{4}$.

(c) Poiché $r_1'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $r_1(-1) = r_1(1) = 0$, è

$$\max_{x\in[-1,1]} |r_1(x)| = r_1\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sim 0.3849$$

Poiché $r_2'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{1}{2}$ e $|r_2(-1)| = r_2(1) = \frac{1}{4}$, è

$$\max_{x\in[-1,1]} |r_2(x)| = r_2\Big(-\frac{1}{2}\Big) = r_2(1) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Quindi $p_2(x)$ fornisce una migliore approssimazione di $f(x)$.