Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 18/6/2014

Esercizio 1

L'algoritmo standard, basato sulla definizione è

$$s = \sqrt(x_1 2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Ogni addendo è afetto dall'errore locale del quadrato, quindi maggiorato in modulo da u. La somma viene effettuata su addendi tutti positivi, quindi l'errore algoritmico della somma è ϵ_1 con $|\epsilon_1| < 2u$. La radice quadrata riduce questo errore della metà e comporta un errore locale. In totale

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < \frac{5}{2}\, u.$$

L'algoritmo proposto differisce da quello standard perché sugli addendi si fa prima una divisione, quindi ogni addendo è affetto da un errore maggiorato in modulo da $3u$. Perciò

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < \frac{9}{2}\, u.$$

Esercizio 2

(a) È $\mathcal{K} = (-\infty, 9/4)$. Le due soluzioni sono

$$\alpha = \frac{3-\sqrt{9-4k}}{2}, \quad \beta = \frac{3+\sqrt{9-4k}}{2}.$$

Chiaramente $|\alpha| < |\beta|$. Il metodo delle tangenti converge ad α per $x_0 < 3/2$ (punto in cui si annulla la derivata) con ordine 2. La successione calcolata con il metodo delle tangenti è

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - 3x_i + k}{2x_i - 3} = \frac{x_i^2 - k}{2x_i - 3},$$

quindi per $x_0 = 0$ si ha $x_1 = \dfrac{x_0^2 - k}{2x_0 - 3} = \dfrac{k}{3}$, $\quad x_2 = \dfrac{x_1^2 - k}{2x_1 - 3} = \dfrac{k}{3}\,\dfrac{k-9}{2k-9}$.
Non esistono valori di $k \in \mathcal{K}$ per cui la funzione $(k-9)/(2k-9)$ è negativa. Perciò i due punti x_1 e x_2 hanno lo stesso segno.

(b) Per il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i) = (x^2 + k)/3$ si ha

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{\sqrt{9-4k}}{3}, \quad g'(\beta) = 1 + \frac{\sqrt{9-4k}}{3}.$$

Quindi β non è punto attrattivo per nessun $k \in \mathcal{K}$. Invece α è punto attrattivo se $\sqrt{9-4k} < 6$, cioè per $k > -27/4$. Quindi per $-27/4 < k < 9/4$ si ha convergenza ad α per un'opportuna scelta di x_0. L'ordine di convergenza è 1, eccetto nel caso in cui $g'(\alpha) = 0$, cioè per $k = 0$. In tal caso si ha $\alpha = 0$ e l'ordine è 2.

Esercizio 3

Le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\rho(J) = 1/2$ e $\rho(G) = 1/4$, ed entrambi i metodi sono convergenti. Inoltre $\|J\|_\infty = 1/2$ e $\|G\|_\infty = 1/2$.

La soluzione esatta è $\boldsymbol{x} = \left[1, 1, 1\right]^T$, quindi

$$\boldsymbol{e}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x} = \left[1024, 1024, 1024\right]^T = 2^{10}\left[1, 1, 1\right]^T, \quad \text{con} \quad \|\boldsymbol{e}^{(0)}\|_\infty = 2^{10}.$$

Con il metodo di Jacobi dopo i iterazioni l'errore si riduce a $\|\boldsymbol{e}^{(i)}\|_\infty \le \|J\|_\infty^i \|\boldsymbol{e}^{(0)}\|_\infty = 2^{10-i}$. Dopo 30 iterazioni l'errore diventa minore di 2^{-20}. In modo analogo, con il metodo di Gauss-Seidel dopo i iterazioni l'errore si riduce a $\|\boldsymbol{e}^{(i)}\|_\infty \le \|G\|_\infty^i \|\boldsymbol{e}^{(0)}\|_\infty = 2^{10-i}$, come con il metodo di Jacobi. Se però si considerano in dettaglio le componenti di $\boldsymbol{e}^{(i)} = [e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}]^T$, si vede che $|e_1^{(i)}| = |e_3^{(i-1)}|/2$, $e_2^{(i)} = 0$ e $|e_3^{(i)}| = |e_3^{(i-1)}|/4$. Dopo i iterazioni si ha $|e_3^{(i)}| = |e_3^{(0)}|/4^i = 2^{10-2i}$ e $|e_1^{(i)}| = 2^{11-2i}$. Ne segue che $\|\boldsymbol{e}^{(i)}\|_\infty$ dopo 16 iterazioni diventa minore di 2^{-20}.

Esercizio 4

Posto $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, il vettore $\boldsymbol{c} = \left[c_3, c_2, c_1, c_0\right]^T$ soddisfa il sistema lineare $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 3b^2 & 2b & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f'(a) \\ f'(b) \end{bmatrix}.$$

Sottraendo dalla seconda riga la prima e dalla quarta la terza si ottiene un determinante in cui la seconda riga e la quarta sono divisibili per $b - a$

$$\det A = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 - a^3 & b^2 - a^2 & b - a & 0 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 3(b^2 - a^2) & 2(b - a) & 0 & 0 \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^2 + ab + a^2 & b + a & 1 & 0 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 3(b + a) & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Quindi

$$\det A = -(b - a)^2 \begin{vmatrix} b^2 + ab + a^2 & b + a & 1 \\ 3a^2 & 2a & 1 \\ 3(b + a) & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Sottraendo dalla seconda riga la prima si ottiene un determinante in cui la seconda riga è divisibile per $a - b$

$$\det A = -(b-a)^2 \begin{vmatrix} b^2 + ab + a^2 & b + a & 1 \\ 2a^2 - ab - b^2 & a - b & 0 \\ 3(b + a) & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(b-a)^3 \begin{vmatrix} 2a + b & 1 \\ 3(b + a) & 2 \end{vmatrix} = -(b-a)^4.$$

Se $a \neq b$ viene $\det A \neq 0$.