Soluzione della seconda prova parziale di Calcolo Numerico
18 Dicembre 2013

Esercizio 1

(a) Si assume $n > 1$. La matrice è simmetrica, quindi i suoi autovalori sono tutti reali. I cerchi di Gerschgorin di A hanno tutti centro in 1 e raggio $(n-1)\,|\alpha|$, quindi gli autovalori verificano la relazione $1-(n-1)|\alpha| \le \lambda \le 1+(n-1)|\alpha|$ e sono tutti non negativi se $1-(n-1)|\alpha| \ge 0$, cioè per $|\alpha| \le 1/(n-1)$ (è una condizione sufficiente, non necessaria).

(b) È $A = (1-\alpha)I + \alpha \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T$, dove $\boldsymbol{e}$ è il vettore di componenti tutte uguali a 1. Quindi $\beta = 1-\alpha$, $\gamma = \alpha$ e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}$.

(c) Gli autovalori della diade $\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T$ sono 0 di molteplicità $n-1$ e $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} = n$ di molteplicità 1. Quindi gli autovalori di A sono $1-\alpha$ di molteplicità $n-1$ e $1-\alpha+n\alpha = 1+(n-1)\alpha$ di molteplicità 1. Gli autovalori sono non negativi per $-1/(n-1) \le \alpha \le 1$ (a conferma di quanto trovato al punto (a)). Poiché A è simmetrica, è $\|A\|_2 = \rho(A) = \max\{|1-\alpha|, |1+(n-1)\alpha|\}$. Quindi per $\alpha \ge 0$ è $\|A\|_2 = 1+(n-1)\alpha$ e per $\alpha < 0$ è $\|A\|_2 = 1-\alpha$ se $\alpha \ge 2/(2-n)$ e $n > 2$ e $\|A\|_2 = -1-(n-1)\alpha$ altrimenti.

Esercizio 2

(a) Applicando un passo del metodo di Gauss alla matrice $A^{(1)} = A$ si ottiene la matrice

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

che è triangolare superiore. Quindi $\det A = -15$.

(b) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = D^{-1}(B+C) = B+C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di J è $p_J(\lambda) = \lambda^4 - 16\lambda^2$. Quindi J ha gli autovalori $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_{3,4} = \pm 4$. Il metodo non è convergente.

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = (D-B)^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Quindi G ha gli autovalori $\lambda_{1,2,3} = 0$ e $\lambda_4 = 16$. Il metodo non è convergente.

(b) La matrice di iterazione P è

$$P = M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Quindi P ha gli autovalori $\lambda_{1,2,3} = 0$ e $\lambda_4 = -4$. Il metodo non è convergente.

Esercizio 3

(a) Il polinomio $p(x)$ cercato soddisfa le condizioni $p(0) = p(1) = 1/2$ e $p(1/3) = p(2/3) = 1/6$. Usando il polinomio di Lagrange si ha

$$p(x) = \frac{1}{2}\,(L_0(x) + L_3(x)) + \frac{1}{6}\,(L_1(x) + L_2(x)),$$

dove

$$L_0(x) = -\frac{9}{2}\Big(x - \frac{1}{3}\Big)\Big(x - \frac{2}{3}\Big)(x-1), \quad L_3(x) = \frac{9}{2}\,x\Big(x - \frac{1}{3}\Big)\Big(x - \frac{2}{3}\Big)$$

$$L_1(x) = \frac{27}{2}\,x\Big(x - \frac{2}{3}\Big)(x-1), \quad L_2(x) = -\frac{27}{2}\,x\Big(x - \frac{1}{3}\Big)(x-1).$$

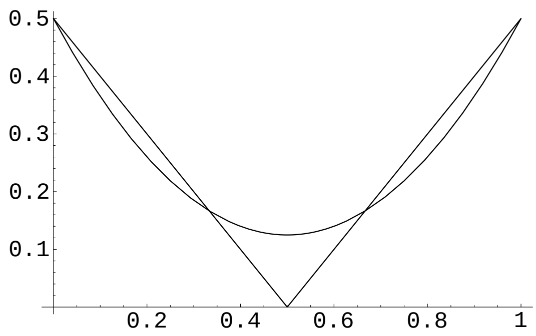
Quindi

$$p(x) = \frac{9}{4}\Big(x - \frac{1}{3}\Big)\Big(x - \frac{2}{3}\Big)(x - x + 1) + \frac{27}{12}\,x(x-1)\Big(x - \frac{2}{3} - x + \frac{1}{3}\Big)$$

$$= \frac{9}{4}\Big(x - \frac{1}{3}\Big)\Big(x - \frac{2}{3}\Big) - \frac{9}{12}\,x(x-1) = \frac{1}{2}\big(3x^2 - 3x + 1\big).$$

Il calcolo può essere svolto in modo più semplice facendo il cambiamento di variabile $z = x - 1/2$. Il polinomio cercato nella variabile z soddisfa le condizioni $p(-1/2) = p(1/2) = 1/2$ e $p(-1/6) = p(1/6) = 1/6$, cioè deve essere simmetrico. Dovrà quindi avere la forma $p(z) = b_0 + b_1 z^2$. Imponendo le condizioni si ottiene subito che $b_0 = 1/8$ e $b_1 = 3/2$. Sostituendo la variabile z si ottiene ovviamente lo stesso polinomio di sopra.

(b) Dal grafico



risulta evidente che

$$|f(x)-p(x)| = \begin{cases} \frac{1}{2}-x-p(x) & \text{per} \quad 0 \le x < \frac{1}{3} \\ p(x)-\frac{1}{2}+x & \text{per} \quad \frac{1}{3} \le x < 0 \\ p(x)+\frac{1}{2}-x & \text{per} \quad 0 \le x < \frac{2}{3} \\ x-\frac{1}{2}-p(x) & \text{per} \quad \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

e che il massimo viene assunto in $1/2$. Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)-p(x)| = p(1/2)-f(1/2) = p(1/2) = \frac{1}{8}.$$

(c) È

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \Big(\frac{1}{2}-x\Big)\,dx + \int_{1/2}^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)\,dx = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(3x^2-3x+1\big)\,dx = \frac{1}{2}\Big[x^3-\frac{3}{2}\,x^2+x\Big]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

I due integrali vengono uguali. Invece applicando la formula dei trapezi con $N=3$ si ha

$$T_3 = \frac{1}{6}\Big(f(0)+2\,\big(f(1/3)+f(2/3)\big)+f(1)\Big) = \frac{5}{18},$$

con un errore di $1/36$.

(d) Ripetendo i calcoli con i 5 nodi assegnati si trova che

$$q(z) = \frac{2}{3}\,(-16z^4+7z^2), \quad \text{da cui} \quad q(x) = \frac{1}{6}\,(-64x^4+128x^3-68x^2+4x+3),$$

e

$$\int_0^1 q(x)\,dx = \frac{1}{6}\Big[-\frac{64}{5}\,x^5+32x^4-\frac{68}{3}\,x^3+2x^2+3x\Big]_0^1 = \frac{23}{90},$$

con un errore di $1/180$ rispetto al valore esatto dell'integrale. Se invece si applicasse la formula dei trapezi con $N=4$ si otterrebbe correttamente

$$T_4 = \frac{1}{8}\Big(f(0)+2\big(f(1/4)+f(1/2)+f(3/4)\big)+f(1)\Big) = \frac{1}{4}.$$