Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 18/6/2015

Esercizio 1

L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x}{(1+x)\log(1+x)}.$$

Poiché

$$\lim_{x->-1^+} c_x = +\infty, \qquad \lim_{x->0} c_x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x->+\infty} c_x = 0,$$

il calcolo di $f(x)$ è malcondizionato solo nell'intorno destro di -1.
L'errore algoritmico del primo algoritmo è

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(4)} + \frac{1}{\log(1+x)^3}\Big(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)} + 3\epsilon^{(1)}\Big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo di $1+x$, $(1+x)^2$ e $(1+x)^3$ e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale del calcolo del logaritmo. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\Big(1 + \frac{5}{3|\log(1+x)|}\Big).$$

Quindi l'algoritmo non è stabile nell'intorno di 0.
L'errore algoritmico del secondo algoritmo è

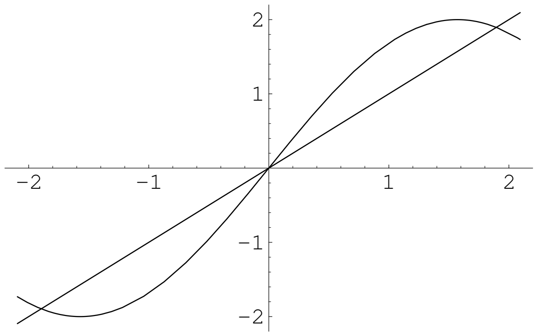
$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(6)} + \epsilon^{(5)} + \frac{1}{\log(1+x)}\,\epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(5)}$ è l'errore locale del calcolo di $\log(1+x)$ e $\epsilon^{(6)}$ è l'errore locale della moltiplicazione per 3. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < u\Big(2 + \frac{1}{|\log(1+x)|}\Big).$$

Quindi anche questo algoritmo non è stabile nell'intorno di 0. Poiché i due algoritmi appaiono sostanzialmente confrontabili dal punto di vista della stabilità, il secondo algoritmo è preferibile perchè richiede un minor numero di operazioni.

Esercizio 2 Esaminando i grafici di $y = x$ e $y = g(x)$ per $|x| \leq 2\pi/3$ si nota che l'equazione $x = g(x)$ (e quindi l'equazione $f(x) = 0$, ad essa equivalente) ha tre soluzioni: $\alpha \in [\pi/2, 2/3\pi]$, $\beta = 0$ e $\gamma = -\alpha$.
(b) Dal grafico risulta subito che non vi può essere convergenza locale del metodo iterativo a β. Poiché $g'(x) = 2\cos x$, nell'intervallo $[\pi/2, 2\pi/3)$ è



$g'(x) \leq 0$ e $|g'(x)| < 1$. Inoltre è $|g'(2\pi/3)| = 1$, $|g(\pi/2)| = 2 < 2\pi/3$ e $|g(2\pi/3)| = \sqrt{3} > \pi/2$. Ne segue che vi è convergenza alternata ad α se si sceglie un punto iniziale $x_0 = \pi/2$ o $x_0 = 2\pi/3$. Inoltre, poichè $g(x)$ è decrescente nell'intervallo $[\pi/2, 2\pi/3]$ abbiamo convergenza alternata per ogni $x_0 \in [\pi/2, 2\pi/3]$. Si ha convergenza anche partendo da $x_0 \in (0, \pi/2)$.
(c) È $h(x) = 2(x - \sin x)/3$. A differenza del caso precedente è $h'(x) > 0$ per $x \in [-2\pi/3, 2\pi/3]$. Poiché $g'(0) = 4/3$, non vi è convergenza locale a β. Vi è invece convergenza ad α per $0 < x_0 < 2\pi/3$. In entrambi i casi l'ordine di convergenza è 1.

Esercizio 3 (a) A ha predominanza diagonale in senso stretto per $1 > n|\alpha|$, quindi per $|\alpha| < 1/n$, in particolare per $|\alpha| < 1/2$ se $n = 2$.
(b) Per $n = 2$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di iterazione di Jacobi è

$$J = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4\alpha^2)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm 2|\alpha|$ ed è $\rho(J) = 2|\alpha|$. Il metodo è convergente per $|\alpha| < 1/2$. La matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$G = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 & 2\alpha^2 \end{bmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 4\alpha^2)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3} = 0$, $\lambda_4 = 4\alpha^2$ ed è $\rho(G) = 4\alpha^2$. Il metodo è convergente per $|\alpha| < 1/2$.

Entrambi imetodi convergono per $|\alpha| < 1/2$, cioè per tutti e soli i valori di α che danno la predominanza.

Esercizio 4 Si ha

$$p(x) = \frac{1}{2}x(x+1),$$

$$r(x) = f(x) - p(x) = x(x-1)(x-3)\,\frac{f'''(\xi)}{6}, \quad \xi \in (0,3),$$

dove

$$f'''(x) = -\frac{x+3}{(1+x)^3 \log 2},$$

$$\max_{x\in[0,3]} |f'''(x)| = \max_{x\in[0,3]} (-f'''(x)) \ = -f'''(0) = 3/\log 2 \sim 4.33,$$

e

$$q(x) = x(x-1)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad q'(x) = 3x^2 - 8x + 3,$$

$$q'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3},$$

$$\max_{x\in[0,3]} |q(x) = -q\Big(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\Big) = \frac{20 + 14\sqrt{7}}{27} \sim 2.1.$$

Sostituendo risulta che il massimo di $|r(x)|$ nell'intervallo è maggiorato da 1.53.