Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 19 Luglio 2007

Esercizio 1

(a) Essendo quella assegnata una funzione di due variabili occorre calcolare i due coefficienti di amplificazione relativi ai dati a e b. Si trova

$$c_a = a\frac{\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}}{f(a,b)} = \frac{b}{a+b}, \qquad c_b = b\frac{\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}}{f(a,b)} = -\frac{b}{a+b}.$$

Siccome $\varepsilon_{in} \doteq c_a\varepsilon_a + c_b\varepsilon_b$ si ottiene la limitazione

$$|\varepsilon_{in}| \leq \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}\frac{2|b|}{|a+b|}.$$

Dunque, visti i valori che i dati a e b possono assumere il problema del calcolo di $f(a,b)$ è malcondizionato solo per per a prossimo a -1 e b prossimo a 1.

(b) Nel caso del calcolo di $f(a,b)$ nella forma iniziale si trova immediatamente $|\varepsilon_{alg}| \leq 2u$. Per la seconda espressione si trova invece la limitazione $|\varepsilon_{alg}| \leq u(2 + \frac{|b|}{|a+b|})$ che è peggiore della precedente e che evidenzia una situazione di instabilità per a prossimo a -1 e b prossimo a 1.

Esercizio 2

(a) Per determinare il numero di soluzioni reali si possono per esempio cercare le intersezioni tra la sinusoide $y = \sin x$ e la retta $y = 50 - 10x$. Si trova che vi è un solo punto di intersezione con ascissa α compresa tra 5 e 6.

(b) Risulta $g'(x) = -\cos x/10$, dunque $|g'(x)| < 1$ per ogni x. Il metodo risulta quindi convergente comunque si scelga il punto iniziale, in quanto per ogni $\rho > 0$ il teorema del punto fisso è applicabile nell'intervallo $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$. L'ordine di convergenza è 1 in quanto $g'(\alpha) \neq 0$.

(c) Risulta $f'(x) = -10 - \cos x$ e dunque $f'(x) < 0$ per ogni x, per cui $f(x)$ risulta sempre decrescente. Inoltre $f''(x) = \sin(x)$, per cui $f''(x) < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi)$. Il teorema di convergenza in largo del metodo delle tangenti è dunque applicabile all'intervallo $[5, 6]$ e garantisce che si ha convergenza scegliendo x_0 tra α e 6. L'ordine di convergenza è 2 in quanto $f'(\alpha) \neq 0 \neq f''(\alpha)$.

Esercizio 3

(a) Il metodo converge se e solo se $\rho(I - \omega A) < 1$. Per quanto noto dalla teoria risulta, indicato con $\sigma(A)$ l'insieme degli autovalori di A, $\rho(I - \omega A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |1 - \omega\lambda|$. Ne segue che il metodo converge se e solo se $|1 - \omega\lambda| < 1$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$.

(b) Risulta

$$|1 - \omega\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \omega\lambda < 1 \Leftrightarrow -2 < -\omega\lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < \omega\lambda < 2.$$

Siccome per ipotesi $\lambda > 0$, $0 < \omega\lambda < 2 \Leftrightarrow 0 < \omega < 2/\lambda$.

(c) Dovrà essere $0 < \omega < 2/100$ ossia $0 < \omega < 1/50$.

(d) A è simmetrica e quindi ha autovalori reali. Utilizzando il teorema di Gerschgorin si trova che gli autovalori di A devono essere positivi e non maggiori di 13. Ne segue che se $0 < \omega < 2/13$ la convergenza è garantita.

Esercizio 4

(a) Avendosi $f(0) = f(2) = 1$ e $f(1) = 0$, risulta $p(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

(b) Risulta $\max\limits_{[0,1]} r(x) = \max\limits_{[1,2]} r(x)$. Ci si può dunque limitare a calcolare il massimo di $r(x)$ in $[1,2]$. In $[1,2]$ risulta $r(x) = \sqrt{x-1} - (x-1)^2$ e quindi $r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - 2(x-1)$. Ne segue che $r(x)$ ha un massimo per $x_M = 1 + 2^{-4/3}$ e risulta $r(x_M) = 3 \cdot 2^{-8/3} \simeq 0.472$.