Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 19/1/ 2009

Esercizio 1

Con l'algoritmo a) si possono verificare errori di overflow se x e/o y sono così grandi che $x \otimes x \notin \mathcal{F}$ o $y \otimes y \notin \mathcal{F}$ o $x \otimes x \oplus y \otimes y \notin \mathcal{F}$ e si possono verificare errori di underflow se x e/o y sono così piccoli che $x \otimes x \notin \mathcal{F}$ o $y \otimes y \notin \mathcal{F}$. Con l'algoritmo b), poiché $y/x \le 1$, non si possono verificare errori di overflow durante le operazioni intermedie e si può verificare overflow solo all'ultima operazione, se x è troppo grande. Si possono verificare errori di underflow se $y/x \notin \mathcal{F}$ o se $(y/x)^2 \notin \mathcal{F}$. Quindi da questo punto di vista è preferibile usare l'algoritmo b).

Dal punto di vista dell'errore algoritmico si ha:
per l'algoritmo a)

$$\epsilon_{alg}^{(a)} = \epsilon^{(4)} + \frac{1}{2}\Big(\epsilon^{(3)} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\epsilon^{(1)} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\,\epsilon^{(2)}\Big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2 e y^2, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali del calcolo della somma e della radice quadrata. Maggiorando in modulo si ha

$$\big|\epsilon_{alg}^{(a)}\big| \le 2u.$$

per l'algoritmo b)

$$\epsilon_{alg}^{(b)} = \eta^{(5)} + \eta^{(4)} + \frac{1}{2}\Big(\eta^{(3)} + \frac{(y/x)^2}{1+(y/x)^2}(\eta^{(2)} + 2\eta^{(1)})\Big),$$

dove $\eta^{(1)}$) e $\eta^{(2)}$) sono gli errori locali del calcolo di y/x e $(y/x)^2$, $\eta^{(3)}$ e $\eta^{(4)}$ sono gli errori locali del calcolo della somma e della radice quadrata, $\eta^{(5)}$ è l'errore locale del calcolo dell'ultima moltiplicazione. Maggiorando in modulo si ha

$$\big|\epsilon_{alg}^{(b)}\big| \le \frac{13}{4}u.$$

Quindi per l'errore algoritmico è preferibile l'algoritmo a).

Esercizio 2

a) Poiché

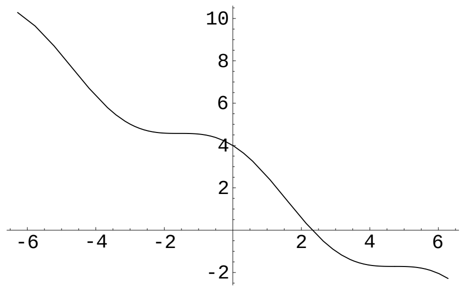
$$f(x) = \cos x - x + 3, \quad f'(x) = -\sin x - 1, \quad f''(x) = -\cos x,$$

risulta che $f'(x) \le 0$ per ogni x ed inoltre

$$\text{per} \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{risulta} \quad f'(x) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = 0,$$

$$\text{per} \quad x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{risulta} \quad f'(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = 0,$$

dove k è un qualsiasi intero. Quindi i primi sono punti di flesso a tangente orizzontale, mentre i secondi sono punti di flesso a tangente obliqua. La funzione $f(x)$ è decrescente per ogni x e i suoi limiti per $x- > \pm\infty$ coincidono con quelli di $-x$. Il suo grafico è



Pertanto vi è un'unica soluzione α compresa fra $\pi/2$ e π, infatti $f(\pi/2) = 3 - \pi/2 > 0$ e $f(\pi) = 2 - \pi < 0$.

b) Nell'intervallo $(\pi/2, \alpha)$ è $f''(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ e $f(x)f''(x) > 0$. Quindi partendo ad un punto x_0 di questo intervallo il metodo delle tangenti converge in modo monotono ad α con ordine di convergenza 2. Anche per $x_0 \in (\alpha, \pi]$ si ha convergenza in quanto $x_1 \in (2, \alpha]$. Infatti partendo da $x_0 = \pi$ si ha

$$x_1 = \pi - \frac{f(\pi)}{f'(\pi)} = 2.$$

Al di fuori dell'intervallo $[\pi/2, \pi]$ si può dire poco in quanto vi sono infiniti punti x_0 a partire dai quali la successione generata dal metodo può finire in uno dei punti a tangente orizzontale.

Esercizio 3

a) Vi sono infinite matrici A di cui J è la matrice di iterazione di Jacobi. Una di tali matrici è

$$A = 8(I - J) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -2 \\ 7 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) Il polinomio caratteristico di J è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{57}{64}\lambda + \frac{7}{64}.$$

c) Poiché la somma dei coefficienti è 1, risulta $p(1) = 0$, perciò $\lambda_1 = 1$. Inoltre dividendo $p(\lambda)$ per $\lambda - 1$ (ad esempio con la regola di Ruffini) si ha

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{7}{64}\right),$$

da cui si ricava che gli altri autovalori sono uguali a $\lambda_2 = -7/8$ e $\lambda_3 = -1/8$. Gli autovettori corrispondenti risultano

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Gli autovalori della matrice A data al punto a) sono $\mu_i = 8(1 - \lambda_i)$, per $i = 1, 2, 3$. Quindi $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 15$ e $\mu_3 = 9$. Gli autovettori di A e di J coincidono.

e) A e J hanno entrambe tre autovalori distinti e quindi tre autovettori linearmente indipendenti, perciò sono diagonalizzabili. La diagonalizzabilità si può anche derivare direttamente dalla simmetria delle due matrici. J ha raggio spettrale uguale a 1, perciò il metodo di Jacobi non è convergente. A ha determinante nullo, cioè una sua riga è combinazione lineare delle altre due. Se la stessa combinazione non vale per le componenti del termine noto il sistema non ha soluzione.

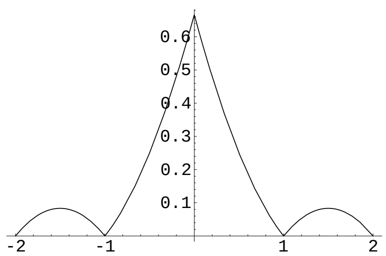
Esercizio 4

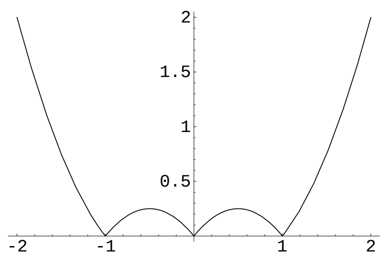
La funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto allo 0, i nodi sono anch'essi simmetrici rispetto a 0, quindi in entrambi i casi il polinomio di interpolazione deve essere una funzione pari, cioè deve esssere formato solo da potenze pari della x. I coefficienti dei due polinomi possono essere calcolati come soluzioni degli opportuni sistemi lineari, o usando la formula di Lagrange.

a) È $p(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{3}$.

b) È $q(x) = x^2$.

c) Per lo studio dei resti non ci si può riferire al teorema, in quanto $f(x)$ non è derivabile in 0. I grafici dei resti in modulo sono (a sinistra $|r(x)|$, a destra $|s(x)|$)





quindi il massimo di $|r(x)| = |f(x) - p(x)|$ è in $x = 0$, cioè è uguale a $|p(0)| = 2/3$. Il massimo di $|s(x)| = |f(x) - q(x)|$ è negli estremi -2 e 2, cioè è uguale a $|f(2) - q(2)| = 2$. Perciò $p(x)$ approssima $f(x)$ meglio di $q(x)$.