Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 19/1/2010

Esercizio 1

a) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+k}}.$$

Poiché $x > 0$ e $k > 0$, è $\sqrt{x} < \sqrt{x+k}$, quindi $0 < |c_x| < 1$ per ogni x. Ne segue che $|\epsilon_{in}| < |\epsilon_x|$ per ogni x nell'intervallo indicato, quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è ben condizionato. Per l'errore algoritmico della prima espressione si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < \left(1 + \frac{3\sqrt{x+k} + 2\sqrt{x}}{2\, f(x)}\right) u,$$

quindi l'algoritmo non è stabile per valori piccoli di k.

b) Per verificare che

$$\sqrt{x+k} - \sqrt{x} = \frac{k}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}}$$

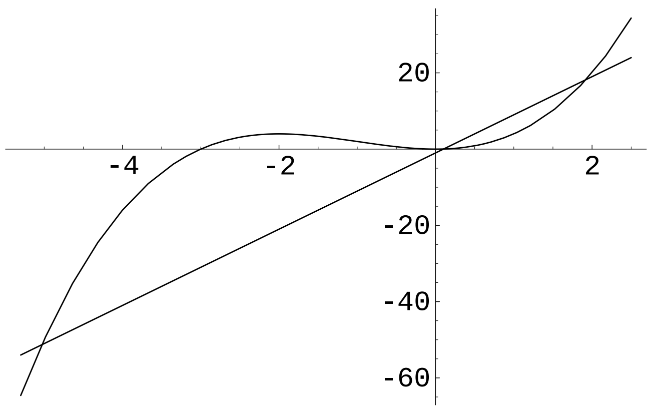
basta moltiplicare entrambi i membri per il denominatore della frazione. Per l'errore algorimico della seconda espressione si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < \left(3 + \frac{\sqrt{x+k}}{2\,(\sqrt{x+k} + \sqrt{x})}\right) u < \frac{7}{2}\, u,$$

quindi l'algoritmo è stabile per ogni x.

Esercizio 2

a) Per determinare quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$ si disegnano i grafici delle due funzioni $f_1(x) = x^3 + 3x^2$ e $f_2(x) = 10x - 1$.



Vi sono tre soluzioni: $-6 < \beta < -5$, $0 < \alpha < 1$ e $1 < \gamma < 2$. Quindi $a = 0$.

b) Posto $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{k}$, è $g'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)}{k}$ e si ha convergenza se

$$-1 < 1 - \frac{f'(x)}{k} < 1, \quad \text{cioè} \quad 0 < \frac{f'(x)}{k} < 2.$$

La convergenza è monotona se

$$0 < 1 - \frac{f'(x)}{k} < 1, \quad \text{cioè} \quad 0 < \frac{f'(x)}{k} < 1.$$

Nell'intervallo $[0,1]$ è $f'(x) = 3x^2 + 6x - 10$, per cui $-10 < f'(x) < -1$. Quindi si ha convergenza se k è negativo e verifica $|k| > \max_{[0,1]} |f'(x)|/2$. Ad esempio si può scegliere $k = -5$. La convergenza è monotona se $|k| > \max_{[0,1]} |f'(x)|$. Ad esempio si può scegliere $k = -10$.

c) Se si riuscisse a porre $k = f'(\alpha)$ il metodo risulterebbe del secondo ordine. In questo caso non è possibile determinare questo valore perché non si conosce α. Il metodo è perciò del primo ordine. Però si potrebbe stimare α con un passo del metodo delle tangenti scegliendo $x_0 = 0$. Si ottiene l'approssimazione 0.1 per α. Per il valore di $k = f'(0.1) = -9.37$ il metodo sarebbe sì del primo ordine, ma comunque molto veloce (3 iterazioni bastano a trovare 6 cifre di α partendo da $x_0 = 0$).

Esercizio 3

a) È

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k^2 & k & 1 & 0 \\ k^3 & k^2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & k & 0 \\ 0 & k^3 & k^2 & k \\ 0 & k^4 & k^3 & k^2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di G è

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 3k^2\lambda + k^4),$$

da cui si ricavano gli autovalori

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{(3-\sqrt{5})\,k^2}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{(3+\sqrt{5})\,k^2}{2}.$$

È $\rho(G) = \dfrac{(3+\sqrt{5})\,k^2}{2}$.

b) È $\rho(G) < 1$ per $k^2 < 2/(3+\sqrt{5}) = (3-\sqrt{5})/2$, quindi il metodo di Gauss-Seidel è convergente per

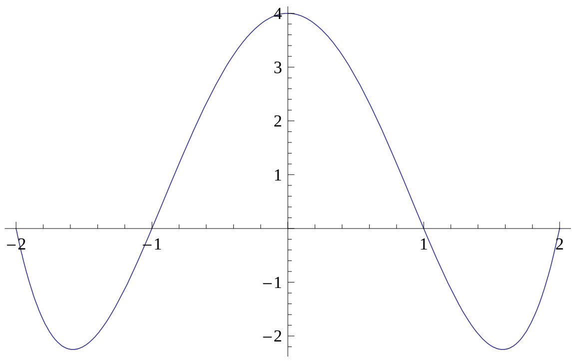
$$|k| < \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Esercizio 4

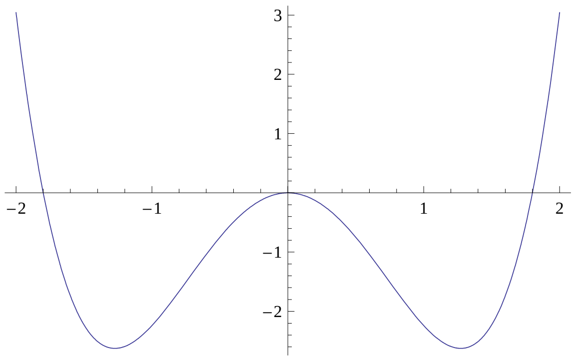
a) È

$$p(x) = 5x^2 - 4 \quad \text{e} \quad q(x) = 3.24\, x^2.$$

b) Il grafico di $r(x)$ è



e il grafico di $s(x)$ è



Risulta

$$\max_{x\in[-2,2]} |r(x)| = r(0) = 4 \quad \text{e} \quad \max_{x\in[-2,2]} |s(x)| = s(2) = 3.04$$

Quindi $q(x)$ approssima $f(x)$ meglio di $p(x)$.