Soluzione della seconda prova parziale
di Calcolo Numerico
19 Dicembre 2008

Esercizio 1

È

$$B = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 & -1/2 \\ 2 & -7/4 & -1 \\ 3/4 & 3/8 & 13/4 \end{bmatrix}.$$

a) Disegnando i cerchi di Gerschgorin si vede che A ha un autovalore reale λ_1 compreso fra -2.5 e 0.5. Gli altri due autovalori λ_2 e λ_3 potrebbero essere non reali perché appartenenti a due cerchi non disgiunti.

Disegnando anche i cerchi per colonne si conclude che

$$-9/4 \le \lambda_1 \le 0.5, \quad 1 \le \Re(\lambda_2) \le \Re(\lambda_3) \le 5$$

b) Disegnando i cerchi di Gerschgorin si vede che B ha un autovalore μ_3 reale compreso fra $17/8$ e $35/8$. Gli altri due autovalori μ_1 e μ_2 potrebbero essere non reali perché appartenenti a due cerchi non disgiunti.

Disegnando anche i cerchi per colonne, per le parti reali di μ_1 e μ_2 si ha

$$-19/8 \le \Re(\mu_1) \le \Re(\mu_2) \le 2$$

c) Poiché $A - 3/4I$ e B sono simili, è $\quad \mu_i = \lambda_i - \dfrac{3}{4}.$

d) Quindi gli autovalori di A e di B sono tutti reali.

e) Tenendo conto delle limitazioni trovate in a) e in b), risulta

$$-13/8 \le \lambda_1 \le 0.5, \quad 1 \le \lambda_2 \le 11/4, \quad 23/8 \le \lambda_3 \le 5,$$

e quindi $\rho(A) = \lambda_3$ e $23/8 \le \rho(A) \le 5$.

Esercizio 2

a) Le matrici J e G di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel sono

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & \alpha/2 \\ 1 & 0 & 1/4-\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & \alpha/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4-\alpha/2 \\ 0 & -1/2 & \alpha/2-1/4 \end{bmatrix}.$$

I polinomi caratteristici sono

$$p_J(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda\Big(\alpha + \frac{1}{4}\Big) - \frac{\alpha}{2}, \qquad p_G(\lambda) = -\lambda^2\Big(\lambda - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\Big).$$

b) Per $\alpha = 0$ si ha

$$p_J(\lambda) = -\lambda\,\Big(\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big), \quad \text{da cui} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

c) Il valore $1/2$ continua ad annullare $p_J(\lambda)$ anche se $\alpha \neq 0$, quindi si può scrivere
$$p_J(\lambda) = -\Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big)\Big(\lambda^2 + \frac{\lambda}{2} - \alpha\Big)$$
da cui si ricavano gli autovalori per α generico. Se $\alpha \geq -1/16$ gli autovalori sono reali
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16\alpha}}{4},$$
se $\alpha < -1/16$, oltre a $1/2$ ci sono due autovalori complessi di modulo $\sqrt{|\alpha|}$.

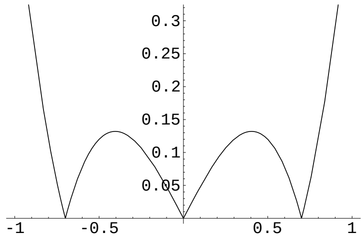
d) Nel primo caso è
$$\rho(J) = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{1+16\alpha}}{4}\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad \alpha \leq 0, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+16\alpha}}{4} & \text{se} \quad \alpha > 0, \end{cases}$$
mentre nel secondo caso è $\rho(J) = \max\{1/2, \sqrt{|\alpha|}\}$. Riassumendo
$$\rho(J) = \begin{cases} \sqrt{|\alpha|} & \text{se} \quad \alpha \leq -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad -\dfrac{1}{4} \leq \alpha \leq 0, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+16\alpha}}{4} & \text{se} \quad \alpha > 0, \end{cases}$$
quindi $\rho(J) < 1$ per $-1 < \alpha < 1/2$. Per tali valori il metodo di Jacobi è convergente.

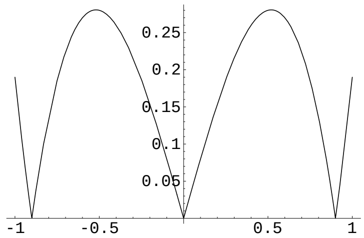
f) Gli autovalori di G sono $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4}$, quindi $\rho(G) = |\alpha/2 + 1/4|$ e $\rho(G) < 1$ per $-5/2 < \alpha < 3/2$. Per tali valori il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

Esercizio 3

a) È $f(x_0) = 1 - \alpha^3$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 1 + \alpha^3$. Quindi i tre punti sono allineati e il polinomio di interpolazione è di primo grado
$$p(x) = 1 + \alpha^2 x.$$

b) $r(x) = x(x^2 - \alpha^2)$. Nell'intervallo $[-1, 1]$ il grafico di $|r(x)|$ ha una delle due forme





(il grafico a sinistra corrisponde al valore $\alpha = 0.7$, il grafico a destra corrisponde al valore $\alpha = 0.9$).

c) È $r_m = \max_{-1 \le x \le 1} |r(x)| = \max\{r(\xi), r(1)\}$, dove ξ è il punto di massimo di $r(x)$ compreso fra -1 e 0. Quindi $\xi = -\sqrt{3}\,\alpha/3$ e $r(\xi) = 2\sqrt{3}\,\alpha^3/9$ e

$$r_m = \max\left\{\frac{2\sqrt{3}\,\alpha^3}{9}, 1 - \alpha^2\right\}.$$

d) La funzione r_m vale 1 per $\alpha = 0$. Al crescere di α è decrescente fino al punto $\overline{\alpha}$ tale che $2\sqrt{3}\,\overline{\alpha}^3/9 = 1 - \overline{\alpha}^2$, poi diventa crescente fino a $\alpha = 1$. Quindi r_m ha minimo in $\overline{\alpha} = (2\sqrt{21} - \sqrt{3})/9$.