Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 20/7/2011

Esercizio 1

L'errore inerente risulta

$$\epsilon_{in} = \frac{xf'(x)}{f(x)}\,\epsilon_x = \frac{2x^2}{x^2+a} + \frac{x}{x+b}\,\epsilon_x.$$

I denominatori si annullano per $x_0 = -b$ e per $x_{1,2} = \pm\sqrt{|a|}$ se $a \le 0$. Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è mal condizionato solo nell'intorno di $-b$ se $a > 0$. Se invece $a \le 0$ vi è mal condizionamento anche negli intorni di $-\sqrt{|a|}$ e di $\sqrt{|a|}$.

Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \frac{x^2}{x^2+a}\,\epsilon_1,$$

dove ϵ_1 è l'errore locale di x^2, ϵ_2 è l'errore locale di x^2+a, ϵ_3 è l'errore locale di $x+b$ e ϵ_4 è l'errore locale di $f(x)$. Quindi

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\left(3 + \frac{x^2}{|x^2+a|}\right).$$

Se $a \ge 0$ è $|\epsilon_{alg}^{(1)}| < 4u$ e il primo algorimo risulta stabile per $x \in [-1,1]$. Altrimenti il primo algorimo non risulta stabile negli intorni di $\pm\sqrt{|a|}$.

Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon_6 + \frac{1}{f(x)}\Big(a\,b\,\epsilon_5 + ((x+b)x+a)x\,\epsilon_4 + (x+b)x\,\big(\epsilon_2+\epsilon_1\big)\Big),$$

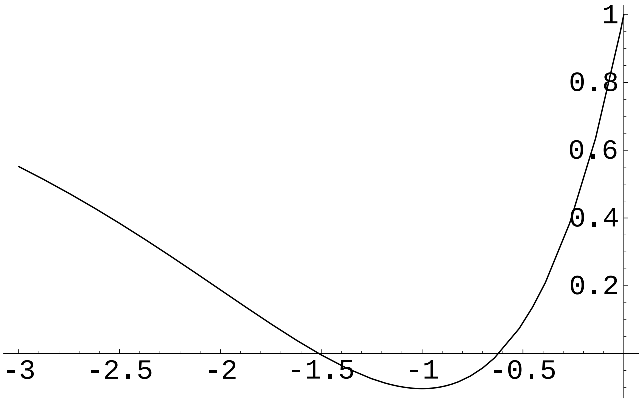
dove ϵ_1 è l'errore locale di $x+b$, ϵ_2 è l'errore locale di $(x+b)x$, ϵ_3 è l'errore locale di $(x+b)x+a$, ϵ_4 è l'errore locale di $((x+b)x+a)x$, ϵ_5 è l'errore locale di $a\,b$ e ϵ_6 è l'errore locale di $f(x)$. Quindi

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\left(1 + \frac{1}{|f(x)|}\big(|a\,b| + 2|((x+b)x+a)x| + 2|(x+b)x|\big)\right)$$

Il secondo algoritmo non risulta stabile nell'intorno di $-b$. Se $a \le 0$ il secondo algorimo non risulta stabile anche negli intorni di $\pm\sqrt{|a|}$. In conclusione il primo algoritmo è preferibile.

Esercizio 2

(a) Si nota che l'equazione non può avere soluzioni positive e che $f(0) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Quindi vi può essere solo un numero pari di soluzioni negative (contate con le loro molteplicità). Inoltre $f'(x) = 3e^x(x+1)$, per cui $f'(x)$ si annulla solo per $\overline{x} = -1$, che risulta punto di minimo. Poiché $f(-1) = 1 - 3/e \sim -0.1$, vi sono possono essere solo due soluzioni: $\alpha \in (-\infty, -1)$ e $\beta \in (-1, 0)$ entrambe di molteplicità 1. Il grafico della $f(x)$ risulta

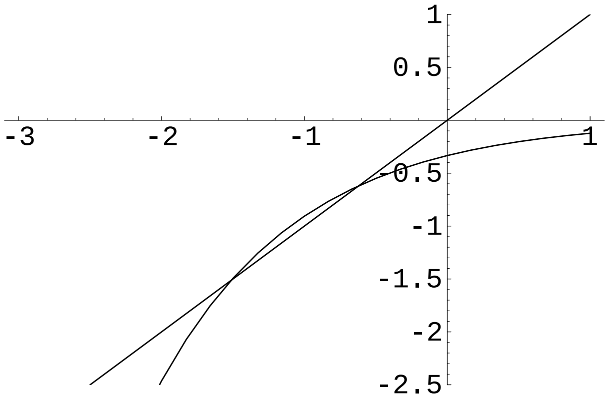


(b) La $f''(x) = 3e^x(x+2)$ si annulla in -2 che è il solo punto di flesso. Quindi se $x_0 > -1$ il metodo delle tangenti converge a β con ordine 2, se $x_0 \in [-2, \alpha)$ il metodo converge ad α con ordine 2, se $x_0 < -2$ oppure $x_0 \in (\alpha, -1)$ il metodo converge ad α o a β a seconda di dove cade x_1.

(c) È

$$x = g(x) = -\frac{1+x}{f'(x)} = -\frac{1+x}{3e^x(x+1)} = -\frac{1}{3e^x},$$

e poiché $e^x \neq 0$ per ogni x, l'equazione $x = g(x)$ è equivalente all'equazione $f(x) = 0$. Il grafico di $y = x$ e $y = g(x)$ risulta



Quindi il metodo iterativo $x_{x+1} = g(x_i)$ converge a β con ordine 1 per $x_0 > \alpha$ e diverge per $x_0 < \alpha$.

Esercizio 3

(a) Il caso di $n = 5$ si esamina come caso particolare di n dispari.

(b) Nel caso generico di n dispari si ha:

al primo passo la prima colonna di A ha $n-1$ elementi da annullare, quindi si devono calcolare $n-1$ moltiplicatori, facendo $n-1$ divisioni. La prima riga, oltre al primo elemento ha un solo altro elemento non nullo, quindi le successive $n-1$ righe vengono modificate nel solo ultimo elemento, richiedendo $n-1$ addizioni e $n-1$ moltiplicazioni. Lo stesso costo si ha per la colonna dei termini noti. Quindi al primo passo sono richieste $2(n-1)$ operazioni additive e $3(n-1)$ operazioni moltiplicative. Alla fine del primo passo la matrice $A^{(1)}$ che si è ottenuta ha sulle colonne di indice $2, \ldots, (n-1)/2$ un solo elemento non nullo al di sotto della riga contenente il pivot.

Nei passi dal secondo al $(n-1)/2$-esimo si deve annullare un solo elemento e questo richiede il calcolo di un moltiplicatore e di una combinazione lineare che modifica 3 elementi (compresa la colonna dei termini noti), quindi 3 operazioni additive e 4 operazioni moltiplicative per passo.

Perciò la trasformazione della A nella triangolare superiore richiede $2(n-1) + 3((n-1)/2-1) = (7n-13)/2$ operazioni additive e $3(n-1)+4((n-1)/2-1) = 5n-9$ operazioni moltiplicative.

Per la risoluzione del sistema triangolare così ottenuto, si deve tenere conto che:

la prima riga ha 2 elementi non nulli,
le righe dalla seconda alla $(n-1)/2$-esima hanno 3 elementi non nulli,
le righe dalla $(n+1)/2$-esima alla penultima hanno 2 elementi non nulli,
l'ultima riga ha un solo elemento non nullo.

Quindi sono richieste $(3n-5)/2$ operazioni additive e $5(n-1)/2$ operazioni moltiplicative.

In totale sono richieste $5n-9$ operazioni additive e $(15n-23)/2$ operazioni moltiplicative.

Nel caso $n = 5$ sono richieste 16 operazioni additive e 26 operazioni moltiplicative.

Esercizio 4

È $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$, $x_1 = 3/2$, $f(x_1) = 81/16$, $x_2 = 2$, $f(x_2) = 16$. Quindi $p(x) = (55x^2 - 105x + 54)/4$, e si ottiene

$$S = \int_1^2 f(x)\, dx = \Big[\frac{x^5}{5}\Big]_{x=1}^{x=2} = \frac{31}{5}$$

e

$$S_1 = \int_1^2 p(x)\, dx = \Big[\frac{55x^3}{12} - \frac{105x^2}{8} + \frac{27x}{2}\Big]_{x=1}^{x=2} = \frac{149}{24}.$$

L'errore assoluto è $|S - S_1| = 1/120$. Tenuto conto che S_1 è il valore che si ottiene con la formula di Cavalieri-Simpson con un solo intevallo, l'errore potrebbe essere valutato con il resto della formula, quindi

$$R_3^{(1)} = -\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)}{2880} = -\frac{24}{2880} = -\frac{1}{120}.$$

In questo caso la valutazione fornita dalla formula del resto coincide esattamente con il valore dell'errore e questo dipende dal fatto che la $f^{(4)}(x)$ è costante.