Soluzione della seconda prova parziale
di Calcolo Numerico del 20 Dicembre 2007

Compito A

Esercizio 1

1. Per $\alpha = 0$ la matrice è triangolare superiore. Quindi i suoi autovalori coincidono con gli elementi principali, cioè $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = 6$.

2. I cerchi di Gershgorin sono: C_1 di centro $(-8, 0)$ e raggio 2, C_2 di centro $(1, 0)$ e raggio $1+4|\alpha|$, C_3 di centro $(-3, 0)$ e raggio $1+2|\alpha|$, C_4 di centro $(6, 0)$ e raggio $6|\alpha|$. I cerchi risultano disgiunti per i valori di α che soddisfano le seguenti disequazioni

$$-6 < -4 - 2|\alpha|, \quad -2 + 2|\alpha| < -4|\alpha|, \quad 2 + 4|\alpha| < 6 - 6|\alpha|,$$

   e quindi per $|\alpha| < 1/3$.

3. Per tali valori di α gli autovalori sono tutti reali e distinti, quindi A è diagonalizzabile. L'autovalore di modulo massimo può stare in C_1 ed in tal caso il suo modulo è compreso fra 6 e 10, oppure in C_2 ma in tal caso il suo modulo non può scendere al di sotto di 6. Quindi $6 < \rho(A) < 10$.

4. Imponiamo la condizione che $A\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$. Dalla prima equazione risulta che $\lambda = -6$. Dalla seconda equazione si ottiene $4\alpha + 2 = \lambda$, da cui si ricava che $\alpha = -2$. Questo valore di α soddisfa anche le altre due equazioni.

Esercizio 2

1. $\alpha \in \mathcal{I}_1$ se e solo se $|\alpha| < 1/2$.

2. La matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha \\ 0 & \alpha^3 & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

   Il polinomio caratteristico di G è

$$p(\lambda) = \lambda^2(2\alpha^2 - \lambda),$$

   quindi $\rho(G) = |\alpha|\sqrt{2}$. Perciò il metodo di Gauss-Seidel è convergente se e solo se $|\alpha| < 1/\sqrt{2}$. Risulta $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$.

3. Assumendo $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, si ottiene

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 7/4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 11/4 \\ 19/8 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

1. È $p(x) = (3x^2 - 17x + 26)/24$.

2. Si ha $r(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\, f'''(\xi)/3!$, quindi

$$r_{\max} = \max_{x\in[1,3]} |r(x)| \le \max_{x\in[1,3]} |(x-1)(x-2)(x-3)| \max_{x\in[1,3]} |f'''(x)|/6.$$

Posto

$$g(x) = \frac{|f'''(x)|}{6} = \frac{1+4x+6x^2+4x^3}{x^4(1+x)^4},$$

si ha

$$\max_{x\in[1,3]} g(x) \le \frac{g(3)}{g(1)} = \frac{175}{16}.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \max_{x\in[1,3]} |(x-1)(x-2)(x-3)| &= \max_{x\in[1,2]} (x-1)(x-2)(x-3) \\ &< \max_{x\in[1,2]} (x-1) \max_{x\in[1,2]} (2-x)(3-x) = 2, \end{aligned}$$

e quindi risulta $r_{\max} < 175/8$.

Una maggiorazione migliore si ottiene se si studia l'andamento della funzione $g(x)$ e si vede che nell'intervallo considerato è $g'(x) < 0$, quindi

$$\max_{x\in[1,3]} g(x) = g(1) = 15/16,$$

da cui si ricava la maggiorazione $r_{\max} < 175/8$.