Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 20/7/2009

Esercizio 1

Numeri reali positivi aventi mantisse con non più di t cifre binarie ed esponenti fino a $M > t$ vengono rappresentati esattamente in $\mathcal{F}_{(2,t,m,M)}$. Quindi due numeri reali la cui rappresentazione coincida devono avere mantisse di almeno $t+1$ cifre binarie. Se $t = 3$ la prima mantissa di 4 cifre è $(0.1001)_2 = 2^{-1} + 2^{-4}$. Questa mantissa, accoppiata con l'esponente 4, dà l'intero $2^4(2^{-1} + 2^{-4}) = 9$. In $\mathcal{F}_{(2,3,m,M)}$ con arrotondamento viene rappresentata come $2^4 \times (0.101)_2$, cioè con la stessa rappresentazione di 10. Nel caso generale la prima mantissa con $t+1$ cifre, accoppiata con l'esponente $t+1$, dà l'intero $2^{t+1}(2^{-1} + 2^{-(t+1)}) = 2^t + 1$. In $\mathcal{F}_{(2,t,m,M)}$ con arrotondamento questo numero viene rappresentato con la stessa rappresentazione di $2^{t+1}(2^{-1} + 2^{-t}) = 2^t + 2$.

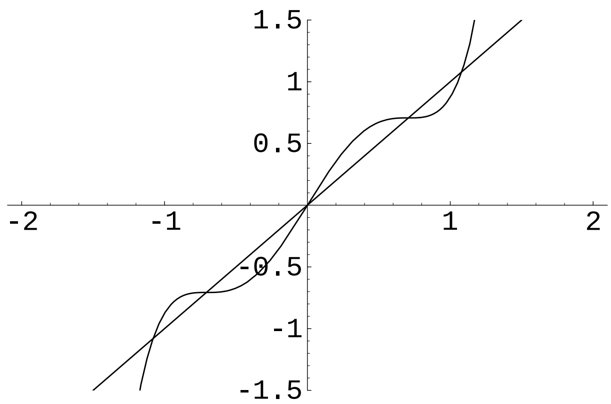
Esercizio 2

a) L'equazione $x = g(x)$ è equivalente a

$$x\,(2x^2 - 1)(6x^2 - 7) = 0.$$

Quindi i punti fissi di $g(x)$ sono $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{7}{6}}$, $\alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha_5 = \sqrt{\frac{7}{6}}$.

b) Dal grafico delle funzioni $y = x$ e $y = g(x)$



risulta evidente che vi è convergenza a α_2 per $x_0 \in (\alpha_1, \alpha_3)$ e a α_4 per $x_0 \in (\alpha_3, \alpha_5)$. Poiché

$$g'(x) = \frac{15}{2}\,(x^2 - \frac{1}{2})^2, \qquad g''(x) = 30x\,(x^2 - \frac{1}{2}), \qquad g'''(x) = 90\,(x^2 - \frac{1}{6}),$$

risulta $g'(\alpha_2) = g''(\alpha_2) = 0$ e $g'''(\alpha_2) \neq 0$. Quindi il metodo converge ad α_2 (e per simmetria ad α_4) con ordine 3.

Esercizio 3

a) È

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che

$$B = \frac{1}{2}\left(3A^2 - A^3\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = A.$$

b) Se λ è autovalore di A e $\mathbf{x}$ un corrispondente autovettore, dalla definizione di autovalore e dalla relazione in a) si ottiene

$$\lambda \mathbf{x} = A\mathbf{x} = \frac{1}{2}\left(3A^2 - A^3\right)\mathbf{x} = \frac{1}{2}\left(3\lambda^2 - \lambda^3\right)\mathbf{x}$$

Quindi gli autovalori di A verificano la relazione

$$\frac{1}{2}\left(3\lambda^2 - \lambda^3\right) = \lambda.$$

c) Da questa relazione si ricava $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.
d) Nel caso generale la matrice di iterazione di Jacobi è data da $J = D^{-1}(B + C)$, dove $A = D - (B + C)$. Nel caso particolare è $D = I$. Quindi

$$J = B + C, \quad A = I - (B + C) = I - J.$$

Quindi $J = I - A$ e i suoi autovalori sono dati da $\mu_i = 1 - \lambda_i$, cioè sono $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -1$. Ne segue che $\rho(J) = 1$, per cui il metodo di Jacobi non è convergente.

Esercizio 4

a) È $f(0) = 1$, $f(1) = 1 - k$ e $f(2) = 1 + k$. Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = \frac{8}{3}\, k\, t^2 - \frac{10}{3}\, k\, t + 1.$$

Il polinomio si riduce di grado solo per il valore $k = 0$.
b) È

$$r(x) = \pi(x)\,\frac{f'''(\xi)}{3!}, \quad \text{dove} \quad \pi(x) = x\Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{3}{2}\Big).$$

È $\pi'(x) = 0$ per $(4 \pm \sqrt{7})/6$. Quindi $|\pi(x)|$ è massimo in uno di questi due punti, ed esattamente

$$\max_{x \in [0,3/2]} |\pi(x)| = \left|\pi\left(\frac{4+\sqrt{7}}{6}\right)\right| \sim 0.264.$$

Inoltre è

$$\max_{x \in [0,3/2]} |f'''(x)| = |k|\,\pi^3.$$

Quindi

$$\max_{x \in [0,3/2]} |r(x)| \leq \frac{0.264\,|k|\,\pi^3}{6} \sim 0.044\,|k|\,\pi^3.$$