Soluzione della seconda prova parziale di Calcolo Numerico
21 Dicembre 2011

Esercizio 1

(a) La matrice A è simmetrica per ogni k, per cui può avere solo autovalori reali.

(b) I cerchi di Gerschgorin hanno tutti centro in 1 e raggi $\leq 3|k|$. Quindi $\rho(A) \leq 1 + 3|k|$. Se $|k| < 1/3$, i tre cerchi non includono l'origine e si può dare la limitazione $\lambda_{\max} < 1 + 3|k|$ e $\lambda_{\min} > 1 - 3|k|$, per cui

$$\mu_2(A) < \frac{1+3|k|}{1-3|k|}.$$

Se $|k| \geq 1/3$, i tre cerchi includono l'origine, quindi è possibile che un autovalore sia nullo. In tal caso non si può dare una limitazione superiore a $\mu_2(A)$.

(c) Se $|k| < 1/3$ i tre autovalori sono diversi da 0, quindi $\det(A) \neq 0$. (Non richiesto dall'esercizio: gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = 1 \pm k\sqrt{5}$, per cui solo se $k = \pm 1/\sqrt{5}$ è $\det(A) = 0$).

Esercizio 2

Il metodo iterativo può essere scritto anche nella forma

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = P\,\boldsymbol{x}_i - \frac{1}{\omega}\,\boldsymbol{b}, \quad \text{dove} \quad P = I + \frac{1}{\omega}\,A.$$

Quindi P è la matrice di iterazione del metodo e dipende dal parametro ω.

(a) Il metodo è convergente per i valori di ω per cui $\rho(P) < 1$. Per trovare gli autovalori λ_i, $i = 1, 2$ di P conviene notare che $\lambda_i = 1 + \mu_i/\omega$, dove μ_i, $i = 1, 2$ sono gli autovalori di A. Poiché gli autovalori di A sono $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 5$, è $\lambda_1 = 1 + 1/\omega$ e $\lambda_2 = 1 + 5/\omega$. Per $\omega > 0$ è $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$, quindi non si può avere convergenza per ω positivo. Per ω negativo si ha $|\lambda_1| < 1$ per $\omega < -1/2$ e $|\lambda_2| < 1$ per $\omega < -5/2$. Quindi $\rho(P) < 1$ per $\omega < -5/2$.

(b) Per $\omega = -3$ è $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2/3$. Per $-3 < \omega < -5/2$ è $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 2/3$ e per $\omega < -3$ è $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 2/3$. Quindi $\rho(P)$ è minimo per $\omega = -3$.

(c) Posto $\boldsymbol{x}^{(0)}$ è $\boldsymbol{x}^{(1)} = -\dfrac{1}{\omega}\,\boldsymbol{b}$. Per esempio, per $\omega = -3$ è $\boldsymbol{x}^{(1)} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3

Il resto della formula dei trapezi è

$$R_N^{(T)} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2}\,f''(\xi).$$

Nel nostro caso è

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \quad \text{e} \quad f'''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Per $x \in [0,1]$ è $f''(x) \geq 0$ e $f'''(x) \leq 0$. Quindi la $f''(x)$ è decrescente ed ha massimo in 0, e $\max\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 2$. Perciò $|R_N^{(T)}| \leq \dfrac{1}{6N^2}$. Se si considera l'errore assoluto dell'approssimazione, si impone che $|R_N^{(T)}| \leq 10^{-6}$, da cui si ricava $N = 409$. Se si considera l'errore relativo dell'approssimazione, si nota che per la formula di Taylor è $\log(1+y) \geq y - y^2/2$ per $y \in [0,1]$, quindi

$$S = \int_0^1 \log(1+x^2)\, dx \geq \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} > \frac{1}{5},$$

per cui si impone che

$$\frac{|R_N^{(T)}|}{S} < \frac{5}{6N^2} \leq 10^{-6}$$

e si ricava $N = 913$.